UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ZAVEDENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V DĚJINÁCH ALGEBRY

INTRODUCTION OF COMPLEX NUMBERS IN HISTORY OF ALGEBRA

Autor:	Ing. Tereza Rybáková
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „*Zavedení komplexních čísel v dějinách algebry*“ vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 6.12.2016

....

podpis

Poděkování:

Ráda bych na tomto místě poděkovala prof. RNDr. Ladislav Kvaszovi, DSc., Dr. za cenné rady a připomínky, za vstřícný přístup a čas strávený nad mojí prací.

Další poděkovaní patří mé rodině, hlavně mamince a manželovi, kteří mě podporovali a hlídali mého syna, abych mohla tuto práci napsat.

Abstrakt

Název práce: Zavedení komplexních čísel v dějinách algebry

Autor: Ing. Tereza Rybáková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.

Cílem této práce je porovnat zavedení komplexních čísel v dějinách algebry a jejich zavedení v učebnicích pro střední školy. Práce se skládá ze tří kapitol, kde první kapitola je věnovaná přehledu osobností z historie algebry, kteří se věnovali komplexním číslům. Jedná se o stručný popis osobností z 16.-18. století a jejich vztahu ke komplexním číslům. Druhá a třetí kapitola práce je zaměřena více prakticky a má za cíl porovnat vybrané knihy nebo učebnice.

V rámci druhé kapitoly jsou popsány a následně pak porovnány knihy z období 16. – 18. století, kde se objevily zmínky o záporných číslech pod odmocninou, poté o imaginárních číslech. Důležité je jejich závěrečné porovnání, které může sloužit i jako doporučení a inspirace pro dnešní učitele matematiky.

Třetí kapitola porovnává čtyři středoškolské učebnice z různého období a klade důraz vysvětlení historie komplexních čísel. Srovnává také odlišné zavedení komplexních čísel, jejich definici a charakteristiku. Na závěr také dává čtenáři odpověď, jak jednotlivé učebnice uvádí využití komplexních čísel v dnešní době.

Klíčová slova: kubické rovnice, casus irreducibilis, odmocnina ze záporných čísel, imaginární čísla, komplexní čísla

Abstract

Title: Introduction of complex numbers in history of algebra

Author: Ing. Tereza Rybáková

Supervisor: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.

The aim of this thesis is to compare the introduction of complex numbers in history of algebra and its different introduction in textbooks at high schools. This thesis consists of three main chapters. The first chapter is dedicated to historical overview of important personalities who work with complex numbers. It is a short overview of personalities from 16th till 18th century and their connection to complex numbers. The second and the third chapters are focused more practically and their goal is to compare selected books from 16th till 18th century or the textbooks.

In second chapter the selected books from 16th till 18th century are described and compared with each other. The square roots of negative number, lately called imaginary numbers, were first mentioned in this time period. Their final comparison is very important and it could be used as a recommendation or inspiration for students – future teachers in mathematics.

The third chapter compares four selected textbooks at high school from different period of time and emphasize on explanation of history. It describes the differences in introduction of complex numbers, its definition and main characteristic. At the end it answers to the reader what is the todays use of complex numbers.

Key words: cubic equation, casus irreducibilis, square root of negative numbers, imaginary numbers, complex numbers

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je porovnat navzájem zavedení komplexních čísel v dějinách algebry a jejich zavedení ve škole. Porovnány budou nejprve tři vybraná díla z období 16. - 18.století důležitá pro další vývoj komplexních čísel. Existence komplexních čísel při řešení kubických rovnic byla objevena a nejvíce rozvedena v 16. až 18. století, proto je tato práce věnována právě tomuto období. Dále také porovnáme čtyři středoškolské učebnice a jejich přístup ke komplexním číslům

V první kapitole jsou popsány důležité milníky v historii algebry v 16. až 18. století, kde se prvně objevily zmínky o záporných číslech. Jednalo se o řešení rovnic třetího stupně, které se nazývali *„casus irreducibilis"*. Kapitola je zaměřena na významné osobnosti, které se snažili tento případ rovnic třetího stupně řešit. Uznali tak existenci záporných čísel a také odmocniny ze záporných čísel – dnešní komplexní čísla. U osobností je stručně uveden životopis a jejich matematický přínos v oblasti komplexních čísel. Další kapitola je věnována třem důležitým dílům, kde se objevují záporná čísla pod odmocninou, později nazývaná imaginární čísla. Jedná se o dílo Girolama Cardana *Ars Magna*, kde jsou sepsány dosavadní poznatky té doby při řešení kvadratických a kubických rovnic. Dalším dílem, které objasňuje záporná čísla pod odmocninou i geometricky, je *Geometrie* od René Descarta. V této knize jsou záporná čísla pod odmocninou nazývána již čísly imaginárními. Posledním popisovaným dílem je *Vollständige Anleitung zur Algebra* od Leonharda Eulera, která nám imaginární čísla více přibližuje a definuje operace s nimi. Náplní třetí kapitoly je porovnání učebnic pro střední školy s tématikou komplexních čísel. Porovnání učebnic je zaměřeno na historii komplexních čísel, zavedení komplexních čísel v učebnicích (definice a základní vlastnosti) a na závěr, zda je v učebnicích uvedeno využití komplexních čísel v dnešní době.

Tato práce dává přehled o komplexních číslech a jejich zavedení a používání v algebře. Pro další rozvoj algebry je velmi důležité uznání jak záporných čísel, tak i odmocnin ze záporných čísel, dnešních komplexních čísel. S tímto posunem v algebře je také spjata základní věta algebry.

1 Hlavní osobnosti v dějinách algebry v 16. - 18. století

V této kapitole budou popsány významné osobnosti, které pracovali s komplexními čísly v období 16. - 18. století. Objev dnešních komplexních čísel (odmocniny ze záporných čísel) je spjat s řešením kubických rovnic, kterou jako první uměli vyřešit: Scipione del Ferro, Niccolo Fontana a Girolamo Cardano. Problematice komplexních čísel (i když v té době ještě neexistovalo pro mě pojmenování) se věnovali Rafaello Bombelli, Albert Girard, René Descartes, John Wallis a Isaac Newton. Dalším je Abraham de Moivre, který dává do souvislosti komplexní čísla a trigonometrii. V 18. století se jednalo o dva důležité matematiky, kteří se významně podíleli na dnešní podobě komplexních čísel. Leonhard Euler zavedl označení *i* pro imaginární jednotku a Karl Friedrich Gauss vytvořil geometrické znázornění komplexního čísla. Matematiků, kteří se věnovali komplexním číslům, bylo daleko více, ale zde jsou uvedeny ti, kteří mezi prvními existenci komplexních čísel objevili, uznali a také přispěli k jejich dnešní podobě. Pro výuku komplexních čísel je důležité znát jejich historii a tato kapitola stručně seznamuje s nejvýznamnějšími matematiky, kteří se komplexním číslům věnovali. U jednotlivých osobností je stručně popsán jejich život a přínos v matematice, důraz je kladen na vztah ke komplexním číslům. Je důležité vědět, kteří matematici pracovali s komplexními čísly a v návaznosti na sebe rozvíjeli poznatky a počítání s komplexními čísly.

1.1 Scipione del Ferro (1465–1526)

Narodil se v Bologni a zde také vystudoval univerzitu, v letech 1496 - 1525 na ní působil jako profesor matematiky. Jeho dílo se však nedochovalo.[1] Scipione del Ferro znal řešení kubické rovnice $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$. Řešení však nikdy nezveřejnil a seznámil s ním svého žáka Antonia Maria Fiore. Cardano po smrti Scipione del Ferra koupil jeho pozůstalost a dostal se tak k řešení kubické rovnice nezávisle na Niccolovi Fontanovi.

[1] BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard. *Matematika v 16. a 17. století*. Praha: Prometheus, 1999. s. 167.

1.2 Niccolo Fontana – zvaný Tartaglia[2] (1499–1557)

Obrázek 1: Portrét Niccola Fontany (zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia)

Fontana byl velice nadaný samouk, který se zabýval matematikou, ale také mechanikou. Byl učitelem matematiky v Benátkách. Vydal několik knih, nejvýznamnější je jeho šestidílná kniha *General trattato di numeri et misure*, která se zabývá matematiko, a to konkrétně aritmetikou, algebrou a geometrií. [3]V roce 1535 byl Fontana vyzván na tzv. „matematický souboj“ od Antonia Maria Fiore. [4] Tento souboj měl obsahovat 30 úloh a ten, kdo prohraje, měl zaplatit 30 zlatých. Fontana se noc před soubojem dozvěděl, že Fiore zná řešení kubické rovnice, a tak dlouho se připravoval, až našel řešení. Fontana tak v den souboje vyřešil všech 30 úloh, které mu připravil Fiore, ale naproti tomu Fiore nevyřešil ani jednu Fontanovu úlohu. Řešení kubické rovnice $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$ má tedy dva autory, kteří ji vyřešili nezávisle na sobě. Girolamo Cardano ji od nich získal a publikoval ve své knize *Ars Magna*, detailní popis je uveden v kapitole 2.4.

1.3 Girolamo Cardano (1501–1576)

Obrázek 10: Portrét Girolama Cardana (zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano)

Byl významným italským matematikem a lékařem. Křestní jméno Cardana můžeme nalézt v různých tvarech, třeba jako Gerolamo nebo Geronimo a latinsky byl uváděn jako Hieronymus Cardanus.

Cardano byl nemanželským synem milánského právníka a lékaře, který dbal na výchovu a vzdělání. Narodil se v Pavii, kde také studoval na univerzitě medicínu, ale svá studia dokončil pak v Padově a stal se zde doktorem medicíny. V dětství býval často nemocen a možná i proto se rozhodl, že se stane lékařem. Snažil se také vstoupit v Miláně do kolegia lékařů, ale byl vyloučen

---

[2] Přezdívka Tartaglia znamená „Koktal“ nebo „Koktavec“. Niccolu Fontanovi byl v dětství přeseknut krk, když vojáci plenili jeho rodné město, naštěstí netrefili krční tepnu, a tak přežil.
[3] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 169.
[4] WAERDEN, B.L. van der. *A History of Algebra*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. s. 55.

pro svůj nemanželský původ. Sám se oženil, když mu bylo 31 let a vzal si za ženu Lucii Bandarini se kterou měl tři děti, dva syny a jednu dceru.

Jako lékaři se mu moc nedařilo a v roce 1534 získal v Miláně místo jako učitel matematiky, o kterou se začal více zajímat. O dva roky později mu bylo nabídnuto, aby učil medicínu v Pavii, tuto nabídku ale odmítl. Od roku 1543 učil medicínu v Miláně, dostal také nabídky ze zahraničí (např. z Dánska), které odmítal a až v roce 1552 přijal nabídku ze Skotska, kde strávil necelý rok. Další léta trávil v Miláně, v rodném městě Pavii a také Bologni. V roce 1552 přišel o svého syna, který byl oběšen kvůli obvinění z otravy své manželky. Nemohl tak zůstat ve svém rodném městě, a tak cestoval po Evropě. V roce 1570 byl vězněn z důvodu černé magie, horoskopů Krista atd., o rok později přišel do Říma, zrovna když se slavilo vítězství nad Turky. Poslední roky svého života Cardano pobýval v Římě, kde od papeže pobíral penzi a tady také roku 1576 zemřel.

Cardano sepsal autobiografii *De vita propria*, která byla přeložena také do angličtiny a ze které se dozvídáme mnoho zajímavostí z jeho života. Popisuje zde svůj soukromý život, od dětství, přes manželství až po smrt svého syna. Zajímavá je kapitola, kde jako lékař popisuje své úspěchy u pacientů. Cardano se považoval za úspěšného lékaře a sebevědomí mu nechybělo, i když víme, že se úplně nedařilo a začal se pak spíše věnovat matematice a její výuce. Aby nepůsobil zas tak sebestředně, tak na konci této knihy nalezneme i kapitolu *LI. Věci, ve kterých cítím, že jsem zklamal*.[5] Zde zmiňuje hlavně výchovu svých synů, se kterou nebyl spokojený. Pro nás je ale daleko důležitější kapitola *XLIV. Věci, kterých jsem dosáhl v různých studiích*[6], kde popisuje své úspěchy i v ostatních odvětvích svého působení, nejen v medicíně.

Cardano napsal mnoho knih, z oblasti astronomie, teologie, fyziky a medicíny. Hodně svých děl ale během života ještě stačil spálit, ve své autobiografii uvádí, že jich bylo přes 120. Dochoval se tak malý zlomek toho, co napsal. Věřil také v nadpřirozené věci, jednu z kapitol své autobiografie také věnuje svým strážným andělům *VLXII. Strážní andělé*[7]. Zde se doznává, že všechny své vědomosti nabyl skrze ducha: *„Jsem si vědom, že jsem získal*

[5] Anglicky *Things in which I feel I have failed*
[6] Anglicky *Things of worth which I have achieved in various studies*
[7] Anglicky *Guardian Angels*

všechny věci, které znám, skrze zdroje duchovna.“[8] Ve své knize *Nesmrtelnost duše*[9] zmiňuje také duchovno a jak je každá duše nesmrtelná.

Cardano se v matematické oblasti zajímal hlavně o algebru a jeho nejznámějším spisem je *Ars Magna*, která byla vydána v roce 1545 v Norimberku a zabývá se řešením algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně. Kromě *Ars Magna* vydal také knihu *Practica Arithmeticae et mensurandi singularis*, která vyšla v roce 1539 v Miláně. Jednalo se o souhrnnou práci, kde byly řešeny aritmetické otázky zamřené na praktické problémy spojené se základy algebry a geometrie.

V matematice je jeho jméno spojováno s tzv. ***Cardanovými vzorci.*** Jedná se o vzorce pro řešení kubických rovnic, kde autorů je více: Ferro, Tartaglia a také samotný Cardano.

Uvádím zde moderní přepis pro řešení kubické rovnice:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Její kořen je dán tzv. Cardanovým vzorcem

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Zajímavostí je, že Girolamo Cardano se věnoval hráním her, rád hrál kostky, šachy a jiné hry. Jeho kniha *Liber de ludo aleae (O hře v kostky),* se tak stala jedním z prvních pojednání o teorii pravděpodobnosti. Cardano se jako první člověk začal zabývat pravděpodobností a tvrdil, že nejde jen o štěstí. To mu v hraní hazardních her přinášelo výhodu a opravdu častokrát nad soupeři vyhrával. Jeho přínos matematice kromě algebry je také tedy v teorii pravděpodobnosti.

1.4 Rafaello Bombelli (1526/30–1572/3)

Rafaello Bombelli byl významným italským matematikem, který se narodil v Bologni jako syn obchodníka s vlnou. Působil jako inženýr, hydrolog a hydraulik. Byl autorem knihy *L´Algebra parte maggiore dell´Aritmetica* (1572), která se skládala ze tří knih. Ve druhé knize se zaměřil právě na řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně.

[8] Anglicky *I am aware, as it were, that I have received all things whatsoever I have known through the channels of the spirit* CARDAN, Jerome. *Book of my life*. New York: E.P. DUTON & CO., INC., 1930. s 245.
[9] Anglicky *On the Immortality of the Soul*

Bombelli studoval a obdivoval knihu *Ars Magna* a více než Cardano se věnoval tzv. *„casus irreducibilis"* a snažil se počítat třetí odmocniny komplexních čísel. [10]

Vypočítal příklad kubické rovnice, kde vyjde právě záporné číslo pod odmocninou:

$$x^3 = 15x + 4.$$

Dle *Cardanova vzorce* je řešení:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli si všiml, že řešením rovnice je $x = 4$.
A následující ve dnešním značení stanovil jako:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi.$$

A odtud vydedukoval, že

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - bi.$$

Následně pak $a = 2$ a $b = 1$, pro řešení rovnice dostáváme $x = a + bi + a - bi = 2a = 4$.

Byl první, který zavedl označení pro dnešní komplexní číslo, kladnou odmocninu ze záporného čísla nazval *piū di meno* a pro zápornou odmocninu ze záporného čísla pak *meno di meno*. Uvedl také příklady počítání (platí i pro dnešní počítání s komplexními čísly), jako např. *meno di meno krát meno di meno rovná se zápornému číslu*.

1.5 Albert Girard (1595–1633)

Obrázek 18: Portrét Alberta Girarda (zdroj: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Posters2/Girard_Albert.html)

Albert Girard byl holandský matematik, který se narodil ve Francii v Sant Mihiel a kvůli náboženství se odstěhoval do Holandska. Když mu bylo 22 let nastoupil na univerzitu v Leidenu, kde studoval matematiku. Část svého života strávil jako inženýr v holandské armádě.

V matematice se zabýval aritmetikou, algebrou a rovinnou a sférickou trigonometrií. V roce 1629 vydal knihu *Invention nouvelle en l´algebre,* kde pracoval jak

[10] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 181.

se zápornými čísly, tak i s komplexními. Při řešení rovnic nazýval imaginární kořeny *solutions impossibles*.[11]

Girard uznává existenci záporných čísel pod odmocninou a tyto řešení nazývá *impossible* (nemožné). Počítal například rovnici $x^4 = 4x - 3$, kde kořeny jsou 1, 1, $-1 + \sqrt{-2}$ z kořenů je právě nemožný: $-1 - \sqrt{-2}$. Poslední dva kořeny jsou nemožné. Uvádím zde jeho důležité tvrzení, proč vlastně pracujeme s řešeními, které jsou nemožné. Girard odpovídá hned třemi způsoby: *abychom měli jistotu všeobecného pravidla, že už neexistují další jiná řešení a pro jejich užití.*[12] Jako první vyslovil základní větu algebry: *„Všechny rovnice v algebře mají tolik řešení, jaký je stupeň nejvyšší mocniny.“*[13]

Girard také studoval „*casus irreducibilis*“, snažil se spočítat třetí odmocniny komplexních čísel. Došel k závěru, že třetí odmocniny komplexně sdružených čísel jsou opět komplexně sdružená čísla. Je také slavný tím, že jako první zformuloval Fibonacciho posloupnost.

1.6 René Descartes (1596–1650)

Obrázek 22: Portrét René Descarta (zdroj: http://mathemagicalworld.weebly.com/rene-descartes.html)

René Descartes byl francouzský filozof, matematik, fyzik a fyziolog. Narodil se ve šlechtické rodině v Rennes, matka mu brzo zemřela, a tak byl vychováván babičkou. Navštěvoval jezuitskou školu ve Fleche, kde se mu dostalo základní vzdělání v matematice, filozofii a jiných vědách. Vystudoval práva na univerzitě v Poitiers a poté odešel do Paříže. Odjel do Holandska a zde se stal příslušníkem armády, dále pak procestoval velkou část Evropy. V roce 1649 byl Descartes pozván švédskou královnou Kristinou do Stockholmu, aby zde založil akademii věd, ale 11.2.1650 umírá na zápal plic.[14]

---

[11] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 204.

[12] Anglicky: *for the certitude of the general rule, and the fact that there are no other solutions, and for its use.* STRUIK, Duirk J. *A Source book in Mathematics, 1200-1800,* Massachusetts: Harvard university press, 1969. c.d., s. 87.

[13] Anglicky: *All equations of algebra receive as many solutions as the denomination of the highest term shows.* STRUIK. *A Source book in Mathematics., c.d.,* s. 85.

[14] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 207-209.

Kromě matematiky se Descartes taky věnoval filosofii, fyzice a v letech 1637-1644 vydává svá nejznámější díla *Rozprava o metodě*, *Dioptrika*, *Geometrie* a *Optika* (1637), *Meditace o první filosofii* (1641) a *Principy filosofie* (1644).

Jeho přínos v matematice je velmi ceněný, jako první zavedl značení pro známé veličiny *a, b, c* a pro neznámé *x, y, z*. Také začal používat exponenty u mocnin. Často pracoval se zápornými čísly, ale i s komplexní čísly, které nazýval *imaginaire*.[15]Descartes také komplexní čísla spojoval s nemožností vyjádřit geometricky, od toho pojem *imaginaire*.

Za zmínku také stojí, že Descartes je považován za zakladatele analytické geometrie. Algebru a algebraické rovnice se snažil vyjádřit geometricky a naopak. Analytická geometrie mohla vzniknout právě proto, že Descartes zavedl algebraickou symboliku, odstranil zákon homogenity a začal používat kanonický tvar rovnic $P(x) = 0$, kde levá strana začala být vnímána jako funkční předpis. Jeho jméno také nese *kartézská*[16] *soustava* souřadnic, kde sice jeho osy nebyly kolmé, a neužíval druhou osu, nezávisle proměnná nenabývala záporných hodnot. V svém díle *Geometrie* stejně jako Girard vyslovil základní větu algebry: *„Vězte tedy, že každá rovnice může mít tolik různých kořenů, kolik má neznámá veličina rozměrů, tj. hodnost této veličiny.“*[17] Více o tomto díle v kapitole 2.2.

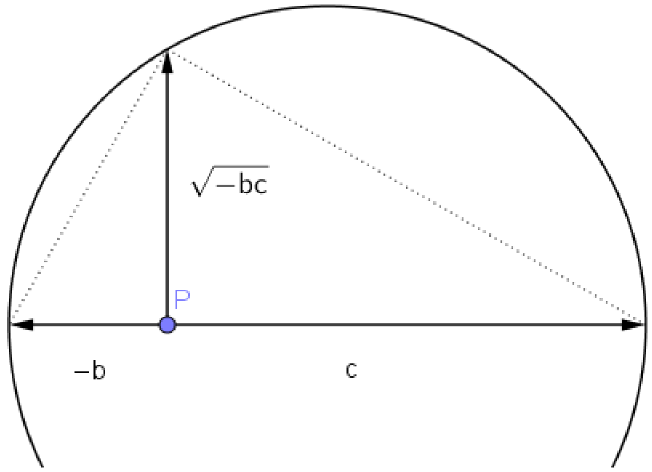
1.7 John Wallis (1616–1703)

Obrázek 23: Portrét Johna Wallise (zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/John_Wallis)

Anglický matematik, který vystudoval teologii v Cambridgi, byl vysvěcen a působil jako kněz. Pak se začal věnovat vědě a matematice, čerpal z děl významných matematiků, také i Descarta. Byl jmenován profesorem matematiky na univerzitě v Oxfordu a stál také u zrodu londýnské Královské společnosti, jedné z nejstarších vědeckých společnost založené v roce 1660.[18] Wallis se zabýval infinitesimálním počtem, teorií čísel, aritmetikou a algebrou. Co se týče algebry, tak v roce 1685 sepsal knihu *Treatise on algebra*. V této knize se Wallis zabývá také řešením kubických rovnic, sestrojuje kořeny kubické rovnice pomocí kubické paraboly, akceptuje záporné i komplexní

[15] Označení i pro komplexní čísla později použil Euler právě z toho pojmenování od Descarta
[16] Dle jeho latinského jména Renatus Cartesius
[17] DESCARTES, René. *Geometrie*. Přeložil Jiří FIALA. Praha: OIKOYMENH, 2010. s. 69.
[18] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 215.

kořeny rovnic.[19] Wallis se také věnoval pojetí čísel a jako první podal vhodnou interpretaci imaginárních čísel. Snažil se imaginární čísla přiblížit pomocí Eukleidovy věty o výšce, kde znázorňuje odmocninu ze záporného čísla $\sqrt{-bc}$.



Obrázek 24: Znázornění imaginární čísla pomocí Eukleidovy věty o výšce (zdroj: BEČVÁŘ a FUCHS, *Matematika v 16. a 17. století., c.d., s. 219.)*

1.8 Isaac Newton (1642–1727)

Obrázek 25: Portrét Isaaca Newtona (zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)

Anglický matematik a fyzik, byl jedním z největších vědců všech dob. Isaaca Newtona vychovala jeho babička, poté co jeho otec zemřel a matka jej opustila. Od pěti let byl v internátních školách, vystudoval Trinity College v Cambridgi, kde se později stal profesorem. V roce 1702 byl zvolen členem Královské společnosti nauk a o rok později se stal jejím prezidentem. Byl také správcem mincovny, členem parlamentu a roku 1705 byl povýšen do šlechtického stavu. [20]

V letech 1673–1683 Newton přednášel v Cambridgi kurz algebry, své přednášky pak sepsal pro knihovnu. Tento rukopis vydal v roce 1707 pod jménem *Arithmetica universalis.*[21] Newton algebru

[19] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 217.
[20] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 100.
[21] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 225.

postavil na aritmetickém základu a více se zaměřil na praktické aplikace. Ve druhém díle této knihy se věnoval obecné teorii řešení algebraických rovnic a geometrické konstrukci kořenů. Pracoval s kladnými, zápornými i komplexními kořeny (*impossibiles*) a vysvětloval na příkladu kružnice a přímky, proč je komplexních kořenů sudý počet.

Newton zformuloval pravidlo pro určení počtu komplexních kořenů algebraické rovnice. Dále také zkoumal kladné, záporné kořeny, dělal odhady jejich hodnot atd. Zabýval se hledáním kořenů pomocí geometrických konstrukcí. Newton byl schopen polynomy sudých stupňů rozložit na kvadratické polynomy, prezentoval řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Isaac Newton je také autorem přibližné metody řešení rovnic, která nese jeho jméno. Newtonova metoda přibližného výpočtu reálného kořene algebraické rovnice byla objevena v roce 1669 a publikována až v roce 1711.[22] Tato metoda je také nazývána Newtonova metoda tečen.

1.9 Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Obrázek 26: Portrét Abrahama de Moivre (zdroj: http://alchetron.com/Abraham-de-Moivre-1078669-W)

Francouzský matematik, který většinu svého života strávil v Anglii, protože se jeho rodina kvůli náboženské persekuci musela přestěhovat do Londýna. Právě v Londýně se začal více věnovat matematice a dával soukromé hodiny matematiky pro studenty u nich doma nebo v kavárnách. Díky přátelství s Isaacem Newtonem se dostal do Královské společnosti a později mu bylo nabídnuto i členství. Abraham de Moivre se zajímal o pravděpodobnost a roku 1718 publikoval dílo *The Doctrine of Chance*, kde je mimo jiné uvedena definice statistické nezávislosti. Dalším jeho koníčkem byla také astronomie. Konec svého života prožil v chudobě a vydělával si jen soukromými lekcemi matematiky nebo hraním šachu.[23]

Důležitým přínosem v matematice a oblasti komplexních čísel je Moivreova věta. Pro libovolné komplexní číslo *x* a libovolné celé číslo *n* platí:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

[22] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 215.
[23] http://www.famous-mathematicians.com/abraham-de-moivre/

1.10 Leonhard Euler (1707–1783)

Obrázek 27: Portrét Leonharda Eulera (zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

Velmi nadaný a průkopnický matematik a fyzik, který pocházel ze švýcarské Basileji. Již v mládí se zajímal o matematiku a tento zájem rozvíjel díky svému otci a rodinnému příteli Jakobovi Bernoullimu. Sice nejdřív studoval na univerzitě v Basileji teologickou fakultu, ale pak se zaměřil na matematiku. Jako dvacetiletý mladík získal druhé místo v soutěži o Velkou cenu pařížské akademie. Euler odcestoval do Petrohradu, kde byl přidělen do matematicko-fyzikální sekce akademie, kde se svými kolegy diskutoval o problémech analýzy, teorie čísel a dalších. Roku 1730 se stal profesorem fyziky v Akademii. Roku 1734 se v Petrohradě oženil s Katharinou Gsell, která byla jako on ze švýcarské rodiny. Další část svého života strávil v Berlíně, kde během 25let napsal asi 380 článků. Leonhard Euler oslepl, nejdříve na levé oko a poté na obě oči. I když byl slepý, napsal díky svým synům mnoho dalších vědeckých prací.[24]

Euler napsal mnoho děl, kolem 880 článků, desítky knih a vědeckých sdělení v podobě dopisů. Je považován za jednoho z nejplodnějších matematiků všech dob. Jeho přínos byl v mnoha oblastech matematiky, v geometrii, matematické analýze a také v teorii čísel. Eulerovi vděčíme za označení *i* pro imaginární jednotku, která se datuje v roce 1777. Toto označení bylo použito v Eulerově knize *Vollständige Anleitung zur Algebra,* která je považována za jeho nejlépe dostupnou a čtivou knihu. V tištěné podobě se symbol *i* objevil až v roce 1794, tedy 11 let po smrti Eulera. Další, kdo použil tento symbol, byl Carl Friedrich Gauss, a to o 7 let později, v roce 1801. Euler vyjádřil komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dále také pomocí Taylorova rozvoje funkcí $\cos t$ a $\sin t$ dospěl k následujícímu vztahu:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

Tento vztah je nyní nazýván tzv. *Eulerovou formulí.*

[24] http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

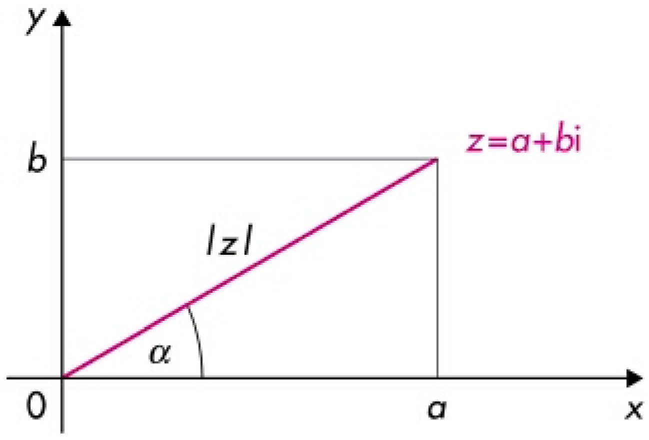
1.11 Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Obrázek 28: Portrét Carla Friedricha Gausse (zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

Slavný německý matematik a fyzik, narodil se v roce 1777 v Braunschweigu. Již v nejrannějším věku vykazoval mimořádné vlohy, uměl číst jednotlivá písmena před nástupem školy a zvládal také aritmetiku a počítání zpaměti. V obecné škole, kterou navštěvoval, po 2 letech postoupil bez problémů do aritmetické třídy. Gauss již v 11 letech zvládl binomickou větu a seznámil se s nekonečnými řadami. Díky podpoře vévody Karla Viléma Ferdinanda nastoupil do Collegia Carolinum, kde se učil 4 roky antickým jazykům a sám intenzivně studoval matematiku. V posledním roce studia objevil *„metodu nejmenších čtverců“*. V roce 1795 odešel studovat do Göttingen na univerzitu George Augusta, protože ve zdejší knihovně bylo velké množství matematické literatury. Zde studoval díla Eulera a Langrage a roku 1796 objevil a dokázal, že eukleidovsky (pravítkem a kružítkem) lze sestrojit pravidelný 17tiúhelník. Toto úzce souviselo s grafickým znázorněním komplexních čísel. Ve své disertační práci dokázal *Základní větu algebry*: každý polynom kladného stupně nad tělesem komplexních čísel má aspoň jeden komplexní kořen. Mezi jeho další přínosy v matematice řadíme: aritmetiku zbytkový tříd (kongruence), Gaussovu eliminační metodu (řešení soustavy rovnic) a jiné. Jeho stěžejní dílo je *Disquisitiones Arithmeticae*, které položilo základy teorie čísel. Gauss také prohlásil: *„Matematika je královnou věd a teorie čísel je královnou matematiky“*.[25]

Carl Fiedrich Gauss jako první zavedl grafické znázornění komplexních čísel. Způsob zobrazení komplexních čísel se nazývá Gaussova rovina (též komplexní rovina). Na osu x se vynáší reálná část komplexního čísla a tato osa je označovaná jako reálná, zatímco na osu y se vynáší imaginární část a osa je označovaná jako imaginární. Komplexní číslo $z = a + bi$ je znázorněno v Gaussově rovině následovně.

[25] DUNNINGTON, G. W. *Carl Frederick Gauss*: *Titan of Science*. New York: MAA, 2004. s. 44.



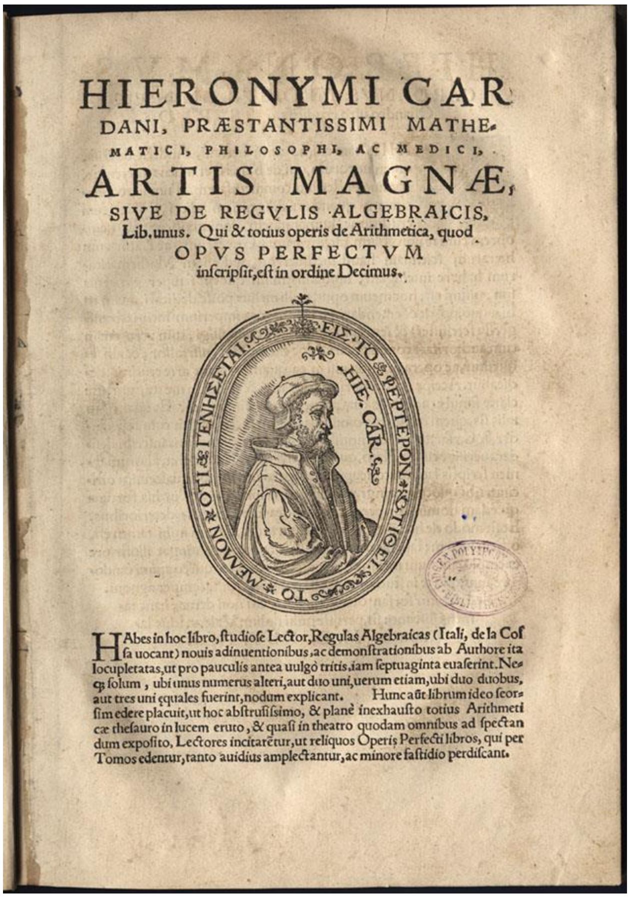
Obrázek 29: Znázornění komplexního čísla v Gaussově rovině (zdroj: https://leporelo.info/rovina-komplexnich-cisel)

Gauss také jako první zavedl dnes používaný pojem *komplexní číslo*, který uvedl ve své knize *Theoria residuorum biquadraticorum* v roce 1831.

2 Hlavní díla z dějin komplexních čísel

V této kapitole se budu věnovat 4 vybraným dílům z historie komplexních čísel v algebře. První zmínka o záporných číslech pod odmocninou se nachází v knize Girolama Cardana *Ars Magna*. Další důležitou knihou je Descartova *La Géométrie*, ve které jsou prvně záporná čísla pod odmocninou nazvána *imaginárními*. Výčet uzavírá Leonhard Euler s knihou *Vollständige Anleitung zur Algebra*, která je napsána srozumitelně a přijatelně pro každého čtenáře a ve které se také věnuje *imaginárním číslům*. Na závěr této kapitoly si dovoluji uvést srovnání těchto knih z hlediska toho, jak ke komplexním číslům přistupují jednotlivý autoři.

2.1 Kniha *Ars Magna* – Girolamo Cardano (1545)


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Obrázek 30: Titulní strana Artis Mangnae (zdroj: http://www.library.ethz.ch/exhibit/fibonacci/fibonacci-02-Cardano.html)

Jedná se o zlomovou knihu v dějinách algebry. Girolamo Cardano shromáždil a sepsal dosavadní pravidla algebry. I když je tato kniha vydána pod jeho jménem, nalezneme zde postupy a řešení i od jiných autorů. Celý název této knihy je: *Ars Magna sive de regulis algebracis (Veliké umění, tedy o pravidlech algebry).* Prvně byla tato kniha vydána v roce 1545 Johannem Petrieusem, druhé vydání bylo v roce 1570 a třetí se uskutečnilo v roce 1663.[26] Dlouho byla dostupná jen v latinském jazyce, ale dnes si jí můžeme přečíst v anglickém překladu od T. Richarda Witmera. Úvod napsal matematik Oystein Ore. V knize je použito moderní matematické značení, aby byla dobře čitelná a srozumitelná, co někdy zastírá historické souvislosti.

Ars Magna je považována za důležitý dokument. Jedná se o první publikaci, kde jsou uvedeny principy řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně spolu s dalšími matematickými

[26] CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. xxii.

inovacemi té doby. Kniha obsahuje 40 kapitol, ve kterých se Cardano zabývá například vztahy mezi kořeny rovnic, popisuje existenci dvou identických kořenů rovnic, uznává také negativním řešení rovnic (záporná čísla). Velká část je věnována řešení kubických rovnic, které bylo v té době přelomové.

V 16. století ještě neexistovaly formule (vzorce), ale jen regule (návody, pravidla). V původním vydání knihy *Ars Magna* nenalezneme žádné vzorce, vše je zde popsáno pomocí pravidel, tzv. regulí. O tom vypovídá i samotný název knihy *Rules of algebra,* kde anglické slovo rule je překlad latinského regula.

Právě u rovnic třetího stupně, tzv. kubických rovnic není snadné určit prvenství při jejich řešení. Při sepisování své knihy se Cardano dozvěděl, že Fontana zná řešení těchto rovnic. Sám moc nad řešením nebádal a rozhodl se řešení od něj získat. Pod přísahou, že řešení nezveřejní, mu jej Fontana prozradil. Cardano sice toto řešení v knize *Ars Magna* zveřejňuje, ale uvádí, že toto řešení má také od Ferrariho, který jej objevil v rukopise Scipione del Ferra. Nezávisle na sobě tedy na řešení kubických rovnic přišli 2 lidé: Niccolo Fontana a Scipione del Ferro. Samotný Cardano dokázal, že tento výpočet je pravdivý a uvedl i grafické a názorné důkazy, více v kapitole 2.1.1. Dále pak rozšířil postup řešení na všechny možné typy kubických rovnic.

Řešení rovnic čtvrtého stupně naleží Lodovicu Ferrarimu, který byl Cardanovým žákem. Ferrari zjistil, že rovnice čtvrtého stupně mohou být zredukovány na kubické rovnice a jejich řešení je uvedeno v kapitole č. 39 nazvané *Pravidlo, při kterém jsme zjistili neznámé množství v mnoha stupních.*[27] Je zde také uvedeno, že toto řešení nalezl Ferrari a že je jej poskytl Cardanovi na vyžádání.[28]

V kapitole č. 37 *Pravidlo, kde předpokládáme záporné číslo*[29] se také věnuje odmocninám ze záporných čísel a na příkladech vysvětluje jejich použití. V knize *Ars Magna* Cardano v každé kapitole uvádí různá pravidla a pomocí důkazů, které jsou většinou grafické, názorně dokazuje jejich správnost. Dále pak uvádí i příklady z tehdejší doby.

[27] Anglicky *On the Rule by Which We Find an Unknown Quantity in Several Stages*
[28] CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 237.
[29] Anglicky *On the Rule for Postulating a Negative*

2.1.1 Řešení kubických rovnic

Jak již bylo řečeno, v knize *Ars Magna* nalezneme řešení kubických rovnic. Hned na začátku kapitoly *XI. Cubus a věc jsou rovny číslu*[30] Cardano uvádí Scipione del Ferra a Fontanu jako autory tohoto řešení:

> *„Scipio Ferro z Bologni před třiceti lety objevil toto pravidlo a předal ho Antoniovi Mario Fiorovi z Benátek, který se utkal s Niccolou Tartagliou z Brescie a dal tak Niccolovi příležitost k objevení tohoto pravidla. On [Tartaglia] mě toto pravidlo předal na mou naléhavou žádost, ač se zatajením důkazu.“*[31]

Cardano vzápětí ale dodává, že on sám rozšířil toto řešení i na ostatní druhy kubických rovnic a nezapomíná dodat, jak to bylo složité a že na tom má také svoji zásluhu: *„S jeho pomocí jsem nalezl jeho názorný příklad v mnoha formách. Bylo to velmi těžké. Následuje pak moje verze“.*[32] Řešení dalších druhů kubických rovnic nalezneme v kapitolách *XI.- XXIII.* knihy *Ars Magna*.

Ukážeme, jak mohli Scipione del Ferro a Niccolo Fontana zjistit, že je možné řešení obecné kubické rovnice převést na řešení kubické rovnice bez kvadratického členu. V dnešní pojetí obecnou kubickou rovnici[33]

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Substitucí $x = y - \frac{a}{3}$ převedeme na rovnici

$$y^3 + py + q = 0$$

Kde koeficienty p, q jsou vyjádřeny pomocí koeficientů a, b, c

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \qquad q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$$

V 16. století, kdy byly prvně řešeny kubické rovnice, matematici pracovali výhradně s kladnými koeficienty. Kladné byly jak koeficienty rovnic, tak i jejich řešení. Když tedy

---

[30] Anglicky *On the Cube and First Power Equal to the Number*

[31] Anglicky „*Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirsty year ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolo Tartaglia of Brescia gave Niccolo occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in reponse to my entraties, though withholding the demonstration*“ CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s 96.

[32] Anglicky *„Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.“* CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 96.

[33] V té době neměli obecnou kubickou rovnici, rozlišovali různé typy rovnic, protože neznali záporná čísla.

matematici uměli zredukovat rovnici s kvadratickým členem a pracovali s kladnými čísly, tak byly rozlišovány tři typy kubických rovnic

1) Cubus a věci jsou rovny číslu ($x^3 + bx = c$).

2) Cubus je roven věcem a číslu ($x^3 = bx + c$).

3) Cubus a číslo jsou rovny věcem ($x^3 + c = bx$),

kde *b* je počet věcí (koeficient u *x*) a *c* je číslo rovnice (konstanta)

Rovnice č. 1) byla vyřešena dvěma již zmíněnými matematiky a řešení u č. 2) a 3) rozvedl samotný Cardano. Seznam druhů kubických rovnic nalezneme v kapitole *II. Souhrnný počet pravidel*, kde Cardano uvádí pravidla pro řešení rovnic kvadratických i kubických rovnic.

V každé kapitole, která se věnuje řešení kubických rovnic, Cardano uvádí názorný příklad doprovázen důkazem, a to pomocí grafického znázornění. Dále je zde slovně popsáno pravidlo pro výpočet neznámé, které je aplikováno na konkrétní příklad. Řešení kubické rovnice č. 1) je u Cardana tedy uvedeno v kapitole č. *XI Cubus a věci jsou rovny číslu*[34] uvedeno následovně:

Pravidlo:

> *„Umocněte na třetí jednu třetinu z počtu věcí, přidejte k tomu jednu polovinu čísla umocněnou na druhou, a to celé odmocněte. Toto zopakujte ještě jednou, jednou k tomuto přidáte polovinu čísla a jednou od toho odečtete polovinu čísla. Dostanete pak binomium a apotome. Potom odečtěte třetí odmocninu z apotome od třetí odmocniny z binomia. Zbyde vám věc.“*[35]

Pokud toto pravidlo přeložíme do matematické symboliky dnešní doby pomocí koeficientů kubické rovnice: $x^3 + bx = c$

Dostaneme řešení pro *x*

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}}$$

[34] Anglicky *On the Cube and First Power Equal to Number* CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 96.

[35] Anglicky: *Cube one-third the coefficient of x; add to it the square of one – half the constant of the equation; and take the square root of the whole. You will duplicate this, and to one of hte two you add one-half the number you have already squared and from the other you subtract one-half the same. You will then have a binomium and its apotome. Then, subtracting the cube root of the apotome from the cube root of the binomium, the remainder [or] that which is left is the value of x* CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 98-99.

Konkrétní příklad:

Toto pravidlo pak aplikuje na konkrétní příklady, zde uvedeme jeden z nich.

$$x^3 + 6x = 20,$$

Kde $b = 6$ a $c = 20$

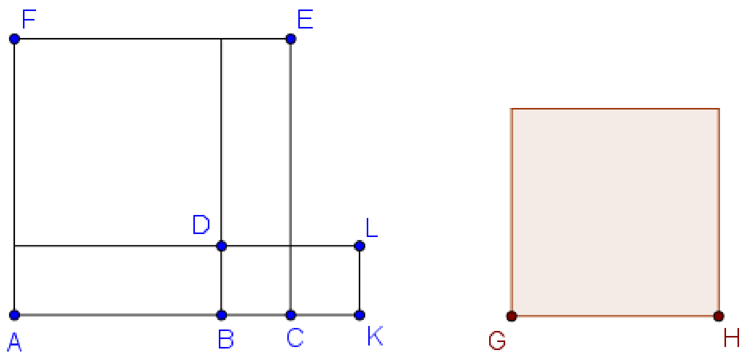
Dle Cardanova pravidla uvedeného výše:

Jedna třetina z 6 (věci) je 2 a 2 na třetí je 8. K tomu přičteme polovinu čísla na druhou polovina čísla je 10 a 10 na druhou je 100. Součet tedy tvoří 108 a jeho odmocnina je $\sqrt{108}$. K této odmocnině jednou přičteme polovinu čísla a jednou ji odečteme. Dostaneme tak tzv. *binomium* $\sqrt{108} + 10$ a k němu *apotome* $\sqrt{108} - 10$. Z těchto výrazů pak uděláme třetí odmocniny, které od sebe odečteme. Řešení tohoto konkrétního příkladu je následovné:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[2]{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt[2]{108} - 10}$$

Důkaz:

Například, nechť je GH^3 plus šestkrát strana *GH* rovna 20 (neboli ať je krychle a šestkrát její strana rovna 20). A nechť jsou *AE* a *CL* krychle, kde rozdíl mezi nimi je 20 a produkt *AC* a *CK* je roven 2 (jedna třetina u koeficientu *x*).



Obrázek 31: Grafické znázornění důkazu (zdroj: CARDANO. The Rules of Algebra., *c.d., s. 96.)*

Z obrázku výše vyplývá, že *BC* je rovno *CK* a *AB* je rovno *GH* (které značíme jako *x*). Z poznatků z předchozích kapitol v knize *Ars Magna* uvádí Cardano tělesa *DA, DC, DF* a *DA* následovně: *DC* odpovídá BC^3, *DF* odpovídá AB^3, *DA* odpovídá $3(BC{\times}AB^2)$ a *DE* $3(AB{\times}BC^2)$. A protože $AC{\times}CK$ je rovna 2, tak $AC{\times}3CK$ se rovná 6, koeficientu u x; pak

$AB \times 3(AC \times CK)$ je rovno 6*x* nebo 6*AB*, kde třikrát produkt *AB*, *BC*, a *AC* je *6AB*. Nyní rozdíl mezi AC^3 a CK^3 – označován jako BC^3, je roven 20 a je také roven součtu těles *DA*, *DE* a *DF*.

Předpokládejme, že *BC* je záporné, podle této demonstrace:

$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2)$.

Rozdíl mezi $3(BC \times AC^2)$ a $3(AC \times BC^2)$ je třikrát produkt *AB*, *BC* a *AC*. Proto, jak bylo ukázáno, je také rovno 6*AB*, přidáme 6*AB* k produktu $3(AC \times BC^2)$, získáme $3(BC \times AC^2)$. Protože je *BC* záporné, tak je i $3(BC \times AC^2)$ záporné a zbytek je tak rovný kladnému.

$$3(CB \times AB^2) + 3(AC \times BC^2) + 6AB = 0$$

Z následujícího je poznat, jaký je rozdíl mezi AC^3 a BC^3 , takový je součet níže:

$$AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2) + 6AB$$

Součet je roven 20, tak jako je rozdíl mezi AC^3 a BC^3 roven 20. Při předpokladu, že *BC* je záporné

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2)$$

Můžeme nyní souhlasit, že

$$AB^3 + 6AB = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2) + 6AB$$

se rovná 20. Dokázali jsme tedy, že:

$$AB^3 + 6AB = 20$$

a z toho $GH^3 + 6GH = 20$.[36]

2.1.2 Případ casus irreducibilis

Při řešení rovnice typu č. 2) a 3) narazil Cardano na záporná čísla pod odmocninou.

My se budeme věnovat ale typu č. 2)[37]

$$x^3 = bx + c$$

[36] CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 96-98.
[37] U typu č. 3) jsou poznatky stejné

Pravidlo:

> *„Pokud jedna třetina počtu věcí na třetí není větší než polovina čísla na druhou, odečtěte dřívější od pozdějšího, k tomuto zůstatku přidejte polovinu věci a to odmocněte, a znovu tento zůstatek odečtěte od poloviny věci a celé odmocněte. A dostanete tak binomum a apotome. Součet třetích odmocnin apotome a binome je rovno věci.“*[38]

Pokud toto pravidlo přeložíme do matematické symboliky dnešní doby pomocí koeficientů kubické rovnice, pak řešení kubické rovnice:

$$x^3 = bx + c$$

je následovné

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

V některých případech tak může dojít k tomu, že $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$ a pod odmocninou je pak záporné číslo. Tento případ se nazývá *„casus irreducibilis“*. V kapitolách, které se věnují řešením kubických rovnic, jsou vždy uvedeny příklady, kdy číslo pod odmocninou vychází kladné. Jen v rámci kapitoly *I. Dvojí řešení,*[39] kde Cardano řeší všechny případy a vztahy mezi kořeny rovnic, se o tomto případě zmiňuje.

Holandský matematik Dirk J. Struik uvádí ve své knize *Dějiny matematiky*: *„Cardano uvažoval též o záporných číslech, která nazýval „fiktivními“, ale nevěděl, co si počít s tzv. „casus irreducibilis“ kubické rovnice, v němž se objevila tři reálná řešení jako součet nebo rozdíl čísel, jež dnes nazýváme komplexními.“* Z toho tedy vyplývá, že Cardano ještě nedokázal tento jev vysvětlit a pojmenovat. Dle Struika k tomu došlo až u Raffaela Bombelliho: *„Tato obtíž byla odstraněna posledním velkým bolognským matematikem 16. století, Raffaelem Bombellim, jehož Algebra vyšla roku 1572.“* Dále zde také uvádí, že Bombelliho kniha se stala oblíbenou četbou pro Leibnize při studiu teorie kubických rovnic a také pro Eulera, který Bombelliho ve své knize přímo cituje.[40]

---

[38] CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 103.
[39] Anglicky *Double Solutions*
[40] STRUIK, Duirk J. *Dějiny Matematiky*. Přeložil Luboš Nový a Jaroslav Folta. Praha: Orbis nakladatelství, 1963. s. 87.

Český historik matematiky Jindřich Bečvář se v knize *Matematika v 16.-17. století* ke casus irreducibilis vyjadřuje následovně:

> *„Tento případ, tzv. casus irreducibilis, byl pro italské matematiky nepochopitelný, ale velice inspirativní. Cardanův vzorec, který v řadě případů řešení kubické rovnice dával, najednou selhával. Casus irreducibilis tak vedl jednak k postupnému uznání záporných čísel, jednak ke studiu druhých odmocnin záporných čísel, tj. čísel komplexních.“*[41]

V knize *A history of algebra* nizozemský matematik Bartel Leendert van der Waerden píše, že při vysvětlování kubických kořenů se Cardano vyhýbá casus irreducibilis a ve všech jeho příkladech, je v kořenu rovnice pod odmocninou vždy kladné číslo. I když při řešení kubických rovnic tedy záporné číslo pod odmocninou ve svých příkladech přímo neuvádí, tak jim věnoval jednu celou kapitolu č. 37 v knize *Ars Magna*. Waerden také uvádí, že Cardano byl první, kdo představil komplexní čísla, i když měl o nich pochybnosti. [42]

Cardano odmocninám ze záporných čísel věnoval přímo kapitolu v knize, která popíšeme v následující kapitole. Odmocniny ze záporných čísel zde ale nevysvětluje na příkladu řešení kubických rovnic.

2.1.3 Záporná čísla a záporná čísla pod odmocninou

Problematiku odmocnin ze záporných čísel nalezneme u Cardana v knize *Ars Magna* v kapitole č. *XXXVII. Pravidlo, které předpokládá záporné číslo.*[43] Zde uvádí existenci záporných čísel a také záporných čísel pod odmocninou. Jako ve většině kapitol je i zde popsáno Pravidlo a následuje Důkaz.

Pravidlo:

> *„Druhý příklad předpokladu záporného čísla zahrnuje odmocninu ze záporného čísla. Dám zde příklad: Pokud to má býti řečeno, tak je potřeba rozdělit* 10 *na dvě části, kde součin bude roven* 30 *nebo* 40*. Je jasná, že tento případ je nemožný. Nicméně my s ním budeme pracovat takto: rozdělíme* 10 *na dvě stejné části, což je* 5*. Pokud umocníme na druhou, dá nám to* 25*. Od* 25 *odečteme* 40*, zůstane nám* -15*. Odmocninu*

[41] BEČVÁŘ, J. a FUCHS, E., *Matematika v 16. a 17. století*., c.d., s. 178.
[42] WAERDEN, B.L. van der. *A History of Algebra*., c.d., s 56
[43] Anglicky *On the Rule for Postulating a Negative*

z -15 *přidáme nebo odečteme od* 5 *a máme výsledek, který když vynásobíme, tak získáme 40. Výsledky tedy jsou:* $5+\sqrt{-15}$ *a* $5-\sqrt{-15}$. *"*[44]

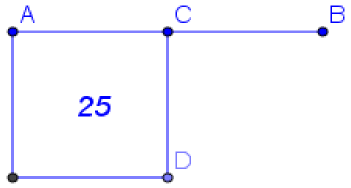
Pokud bychom tento příklad zapsali do podoby dnešní rovnice, jednalo by se o kvadratickou rovnici, která byla by vyjádřena následovně:

$$x(10-x)=40$$

Řešením je $x=5+\sqrt{-15}$ a $x=5-\sqrt{-15}$.

Důkaz:

Uvažujte úsečku AB, která má délku 10 a která má být rozdělena na dvě části a obdélník na ní musí být 40. 40 je čtyř-násobek 10 a my si tedy přejeme zečtyřnásobit celou AB. Nyní, nechť je AD je čtverec AC, poloviny AB a od AD odečteme AB a ignorujeme čísla. Odmocnina ze zůstatku, přičtena nebo odečtena od AC nám ukazuje výsledné části. Ale protože je zůstatek záporný, budeme si muset představit $\sqrt{-15}$, což je rozdíl mezi AD a 4AB, který když přičteme nebo odečteme k AC, dostaneme, co jsme hledali, jmenovitě $5+\sqrt{25-40}$ a $5-\sqrt{25-40}$.



Obrázek 32: Grafické znázornění důkazu (zdroj: CARDANO. The Rules of Algebra.*, c.d., s. 219.)*

Cardano byl prvním, který se ve své knize zmínil o záporných číslech pod odmocninou, i když o nich měl určité nejasnosti. Díky němu pak další matematikové mohli rozvíjet poznatky o záporných číslech pod odmocninou a definovat tak komplexní čísla. Rovnici „casus irreduciblis" se pak věnovali více další autoři, např. René Descartes a Leonhard Euler. Díla, kde se tyto rovnice vyskytující, popisují následující kapitoly 2.2 a 2.3.

[44] The second species of negative assumption involves the square root of a negative. I will give an example: If it should be said, Divide into two parts the product of which is 30 or 40, it is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus: We divide 10 into two equal parts, making each 5. These we square, making 25. Subtract 40, if you will, from the 25 thus produced, as I showed you in the chapter on operation s in the sixth book, leaving a remainder of -15, the square root of which added to or subtracted from 5 gives parts the product of which is 40. These will be 5+√(-15) a 5-√(-15). CARDANO. *The Rules of Algebra.*, c.d., s. 219.

2.2 Kniha *La Géométrie* – René Descartes (1637)


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Auec Priuilege.

Obrázek 33: Titulní strana Rozpravy o metodě (zdroj: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_La_G%C3%A9om%C3%A9trie.djvu)

Geometrie je jedním ze 3 esejů, které doprovázely *Rozpravu o metodě*, dalšími byli *Dioptrika* (nauka o lomu světla) a *Meteory* (pojednání o úkazech na nebi a na zemi). Descartes píše: *„Geometři na Sorbonně nejsou schopni ji [Geometrii] pochopit a latinský překlad, který připravil Schooten, na tom nebude lépe“.*[45] Schootenův překlad byl povedený a vyšel ještě za Descartova života, v roce 1649. Kniha *Geometrie* pak samostatně vyšla až v roce 1886 ve francouzském originále a dále pak byla překládána do dalších světových jazyků (do německého, anglického a ruského jazyka). Do českého jazyka byla přeložena Jiřím Fialou z francouzského vydání s přihlédnutím k prvnímu vydání z roku 1637. Pracuji s tímto překladem, který je doplněn přetiskem z latinského vydání od Schootena z roku 1683. Kniha je rozdělena do třech kapitol, které Descartes nazývá knihy. V první knize se dozvídáme o úlohách, které lze sestrojit pomocí úseček a kružnice, druhá kniha je věnována složitějším křivkám a ve třetí knize se dostáváme k řešení rovnic a konstrukci úloh, které nás v tomto případě budou nejvíce zajímat.

Descartes zavádí v této knize moderní symboliku, známé veličiny značí písmeny ze začátku abecedy a, b, c a neznámé veličiny zas z konce abecedy *x, y, z*. Pro zápis mocnin začíná používat exponenty ($a^3, a^4, \ldots$), jen pro a^2 ještě používá *aa*., převádí rovnice na *kanonický tvar* (všechny členy jsou převedeny na jednu stranu rovnice a druhá je rovna 0), místo rovnítka užívá symbol podobný ležaté osmičce. Descartes ukazuje, jak lze využít algebru v geometrii a jak pomocí grafického řešení lze získat kořeny rovnic (průsečíky křivek).[46]

2.2.1 Rovnice a jejich kořeny

Ve třetí knize *Geometrie* Descartes uvádí pravidla počítání s rovnicemi a zjišťování jejich kořenů. Je zde uvedeno mnoho důležitých poznatků, které Descartes jako první zavádí,

[45] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. ii.
[46] BEČVÁŘ a FUCHS. *Matematika v 16. a 17. století.*, c.d., s. 212

a proto je zde pomocí citací vyjmenuji. Hned zpočátku své knihy uvádí, že při počítání s rovnicemi bude nejlepší, pokud všechny členy budou na jedné straně rovnice a na druhé bude nula – převod na *kanonický* tvar rovnice. Descartes říká, že:

> *„Je třeba, abych zde něco řekl obecně o povaze rovnic: to jest o součtech složených z více členů, zčásti známých a zčásti neznámých, z nichž se jedny rovnají druhým, nebo spíše jsou-li vzaty pospolu se rovnají ničemu: neboť bude často nejlepší je uvažovat tímto způsobem.“* [47]

Jak jsme již uvedli, tak Descartes formuloval základní větu algebry: *„Každá rovnice může mít tolik různých kořenů, kolik má neznámá veličina rozměrů.“*[48] Descartes vždy uvádí nejdříve příklad a pak teprve zobecňuje a za známé veličiny dosazuje a, b, c… Zde uvádí příklad, že rovnice $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ má tři kořeny, protože její *x* má tři rozměry. Kořeny této rovnice jsou 2, 3 a 4, jedná se o kořeny pravé (kladné). Pokud jsou kořeny menší než nic (záporné), nazývá je Descartes nepravé. Dále zde také formuluje důležitou větu, která jím byla prvně vyslovena:

> *„Součet nějaké rovnice, která obsahuje více kořenů, může být vždy dělen dvojčlenem [binome] složeným z neznámé veličiny mínus hodnota jednoho z pravých kořenů, jakéhokoli; nebo plus hodnota jednoho z nepravých.“* [49]

Dalším důležitým přínosem do algebry je, jak poznat počty pravých a nepravých kořenů, pokud jsou všechny kořeny reálné a koeficienty rovnic jsou všechny nenulové. Descartes uvádí příklad a tvrdí, že:

> *„Z toho poznáme, kolik může být v nějaké rovnici kořenů pravých a kolik nepravých. Pravých kořenů v ní může být tolik, kolikrát se v ní objeví znaménka $+$ a $-$; a tolik nepravých, kolikrát se v ní objeví za sebou dva znaky $+$ nebo dva znaky $-$.“* [50]

Dále uvádí další pravidla, jako je zvýšení nebo snížení kořenu o nějakou hodnotu, odstranění druhého členu (myšleno x^2) v rovnice třetího stupně nejdříve na konkrétním příkladu a pak všeobecně. Descartes zde také uvádí návod, jak lze v rovnici převést zlomky a čísla hluchá (dnes nazývaná iracionální) na čísla celá. Descartes se zde také zmiňuje o číslech imaginárních:

---

[47] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 69.
[48] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 69.
[49] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 69.
[50] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 70.

„Nakonec, jak pravé, tak nepravé kořeny nebývají vždy reálné, nýbrž někdy imaginární [imaginaires]; tj. ačkoli si je možno vždy představit [imaginer] u každé rovnice tolik kořenů, kolik jsem řekl, někdy však neexistuje ani jedna veličina, která by odpovídala těmto imaginárním kořenům.“[51]

Descartes zde tedy prvně hovoří o **číslech imaginárních**, uvádí příklad kubické rovnice, kde vyjdou dva kořeny imaginární. Řešením kubických rovnic se pak věnuje na dalších stránkách. Jako první tyto čísla pojmenovává imaginárními, podle něj pak s tímto pojmenováním pracuje Euler, který zavádí i jako imaginární jednotku.

2.2.2 Rovnice třetího a čtvrtého stupně a jejich grafické řešení

Důležitým přínosem v oblasti řešení rovnic je nepochybně geometrické vyjádření rovnic a hledání kořenů pomocí průsečíků křivek. Rovnici čtvrtého stupně zde Descartes ilustruje na příkladu, kde máme daný čtverec ABCD a úsečku BN. Za pomoci podobnosti trojúhelníku při správném označení neznámé se dostáváme rovnici čtvrtého stupně. Rovnice čtvrtého stupně, kde chybí třetí člen rovnice (myšleno x^3) řeší Descartes pomocí paraboly a kružnice. Kružnice se paraboly může dotýkat v 1 nebo ve 2 nebo 3 nebo 4 bodech a po spuštění kolmice z těchto bodů na osu paraboly, tak máme všechny kořeny rovnice. Descartes se zde opět zmiňuje o imaginárních číslech a tvrdí, že:

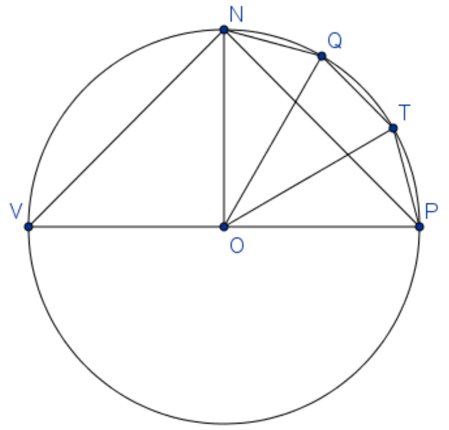
„A konečně, jestliže tato kružnice neprotíná parabolu a ani se jí v žádném bodě nedotýká, svědčí to o tom, že v této rovnice není žádný kořen, ani pravý ani nepravý, a že všechny jsou imaginární. Takže toto pravidlo je nejobecnější a nejúplnějším, jak je možné si jenom přát.“[52]

Descartes dále pak rozebírá Cardanovy vzorce a navrhuje grafické řešení, které vychází z tětiv v kružnici.

„Konečně máme-li $z^3 = +pz - q$ *a předpokládáme-li kružnici NQPV, jejíž poloměr je* $\sqrt{\frac{1}{3}p}$*, a vepsanou úsečku NP, rovnou* $\frac{3q}{p}$*, bude NQ, tětiva třetiny oblouku NQP, jedním z hledaných kořenů a NV, tětiva třetiny druhého oblouku, bude kořenem druhým.“*[53]

[51] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 76.
[52] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 88.
[53] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 94.

Předchozí vysvětlení je v knize doplněno geometrickým znázorněním, viz níže. Tětivy *NQ* a *NV* jsou řešením dané kubické rovnice.



Obrázek 34: Geometrické zobrazení důkazu (zdroj: DESCARTES. Geometrie., *c.d., s. 94.)*

V rovnici $z^3 - pz + q = 0$ se kořen rovnice vypočítá následovně

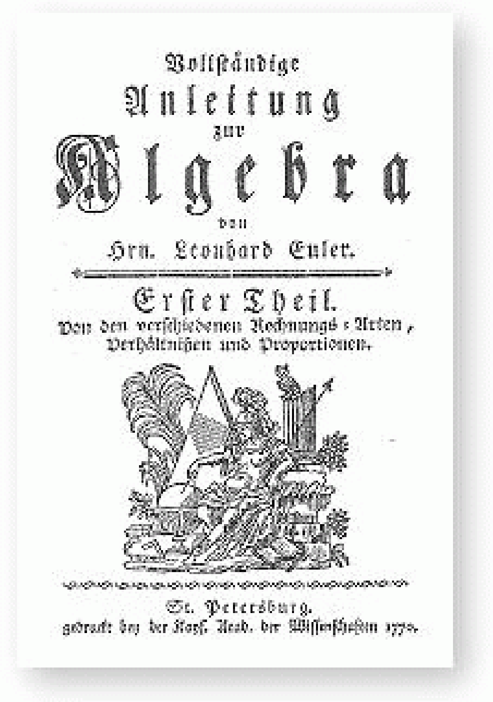
$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

> *„Pokud čtverec posledního členu není větší než třetina mocniny předposledního členu, tak by se úsečka NV nemohla vepsat do kružnice, protože by byla delší než její průměr. Což by byl případ, kdy by dva pravé kořeny byly jen imaginární*." [54]

Descartes tedy uvádí všechna možná řešení rovnic mezi které patří i imaginární kořeny. Jeho grafické znázornění je srozumitelné a jasné. Vysvětlení je všeobecné, a to pomocí veličin p, q … a čtenáři by přišlo vhod grafické znázornění s dosazenými hodnotami, jak tomu bylo na začátku třetí knihy. Ale jak sám Descartes často v knize uvádí, tak tyto příklady nechává schválně na čtenáři, aby si vyzkoušel sám.

[54] DESCARTES. *Geometrie.*, c.d., s. 94.

2.3 Kniha *Vollständige Anleitung zur Algebra* – Leonhard Euler (1770)



Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.
St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

Obrázek 35: Titulní strana Vollständige Anleitung zur Algebra (zdroj: https://www.uni-due.de/didmath/ag_jahnke/jahnke/historisch_euler 1)

Kniha byla vydána v roce 1770 v německém jazyce v královské akademii věd v Petersburgu. Jedná se o knihu, kde jsou uvedeny základní pravidla algebry. Originální název této knihy je V*ollständige Anleitung zur Algebra*, což v překladu znamená *Kompletní úvod do algebry*. Do angličtiny byla přeložena jako *Elements of Algebra* jednou překladatelem Johnem Hewittem (1822) a podruhé Charlesem Taylerem (1824). V následujícím textu budu pracovat z překladu Johna Hewitta, který knihu přeložil z francouzského překladu od Jeana Bernoulliho a s doplňujícími dodatky od Josepha Luise Lagrange. Kniha je velice čtivá, je napsána srozumitelně a každý pojem je vysvětlen a ilustrován na příkladu. I když je kniha přes 245 let stará, je napsaná velice poutavě a zřetelně. Kniha se skládá se 2 hlavních kapitol a dodatku.

2.3.1 Komplexní čísla nazývané jako nemožné nebo imaginární množství

Euler vysvětluje vše od začátku a začíná pojmem množství, kde matematiku nazývá vědou o množství (*Mathematics is the sience of quantity*). Dále definuje operace sčítání a odčítání, kde se dostává k vysvětlení a zavedení pojmů pro čísla přirozená a pro čísla celá. Dále definuje i násobení a dělení, rozlišuje také prvočísla a čísla složená, obor čísel pak rozšiřuje o zlomky. Ve své knize také vysvětluje násobení čísla samo sebou (umocnění na druhou) a k němu také opačnou operaci a to odmocnění, kde zavadí iracionální čísla a ostatní označuje racionálními. V kapitole č. XIII se dostáváme právě ke komplexním číslům, které Leonhard Euler nazývá *nemožné* nebo *imaginární*. V odstavci číslo 141. přímo uvádí: *„Musíme zde shrnout, že odmocnina ze záporného čísla nemůže být kladné ani záporné číslo, protože i záporné číslo na druhou je kladné číslo: tudíž musí patřit k úplně odlišným druhům* *čísel, protože nemůže být zařazeno mezi kladná nebo záporná čísla.“*[55] Zde je tedy řečeno, že odmocnina ze záporného čísla je úplně jiný druh čísel, který nelez zařadit mezi kladná nebo záporná. Dále také Euler tvrdí, že:

> *„A protože všechna čísla, která jsou možná vymyslet, jsou buď větší nebo menší než 0, nebo 0 samotná, tak je evidentní, že odmocniny ze záporných čísel nemůže řadit mezi možná čísla, tak musíme říct, že jsou nemožné množství. V tomto případě se dostáváme k myšlence čísel, které ze své přirození podstavy jsou nemožné, a proto je nazýváme* ***imaginárním*** *množstvím, protože existují pouze v naší představě.“*[56]

Odmocniny ze záporných čísel tedy nazývá **imaginární čísla**, z tohoto slova pak zavádí v roce 1777 označení i pro imaginární jednotku, v tištěné podobě byla zavedena až v roce 1794. V následujících odstavcích pak zavadí pravidla počítání s odmocninami ze záporných čísel. Jedno z pravidel je také, že odmocnina z jakéhokoliv čísla má vždy 2 hodnoty, jednu kladnou a druhou zápornou a stejně je tomu i tak i u odmocniny ze záporného čísla. Odmocnina z $-a$ se rovná $+\sqrt{-a}$ a $-\sqrt{-a}$. Na závěr této kapitoly uvádí také názorný příklad, kdy se setkáme s odmocninou ze záporného čísla: Rozdělte číslo 12 na dva stejné části, tak aby jejich produkt (vynásobení) bylo 40. Nalezneme řešení $6+\sqrt{-4}$ a $6-\sqrt{-4}$, tyto čísla jsou však imaginární, a tak musíme říct, že je nemožné toto vyřešit.

2.3.2 Řešení kubické rovnice pomocí Cardanova pravidla

Ve druhé části v kapitole č. *XII Pravidlo podle Cardana nebo Scipione del Ferra* se Euler věnuje vysvětlení pravidla pro řešení kubických rovnic, které bylo objeveno Scipionem del Ferrem a poté uvedeno v knize *Ars Magna* od Cardana. Uvádí zde formuli pro výpočet kořenů kubické rovnice se zavedením jiných proměnných, než uvádí Cardano.

Pro kubickou rovnici $x^3 = fx + g$, kde f a g jsou jakákoliv čísla, získáme

[55] Anglicky *We must therefore conclude, that the square root of a negative number cannot be either positive or number or a negative number, since the squares of negative numbers also take the sign plus: consequently, the root in question must belong to an entirely distinct species of numbers, as it cannot be ranked either among positive, or negative numbers*. EULER, Leonard. *Elements of algebra.* Translated by John Hewlett. West Hanover, Massachusetts: Halliday Lithograph, 1984. s. 42.

[56] Anglicky *And, since all numbers which is possible to conceive are either greater or less than 0, or are 0 itself, it is evident that we cannot rank the square root of a negative number among possible numbers, and we must therefore say that i tis an impossible quantity. In this manner we are led to the idea of numbers, which from their nature are impossible, and therefore they are usually called imaginary quantities, because they exist merely in the imagination.* EULER. *Elements of algebra.*, c.d., s. 43.

$$x = \sqrt[3]{\frac{(g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3})}{2}} + \sqrt[3]{\frac{(g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3})}{2}}$$ [57]

Euler pak dosazuje za f a g různá čísla a vypočítává kořeny rovnice. Na konci této kapitoly pak počítá kubickou rovnici $x^3 = 6x + 4$, kde $f = 6$ a $g = 4$. Pokud dosadíme tyto čísla do Cardanovy formule vyjde nám *x* následovně:

$$x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$$

Kořen této rovnice má pod odmocninou záporné číslo a nazýváme ho tedy imaginární kořen. Tento případ nastane vždy, pokud je $\frac{4}{27}f^3 < g^2$ a nazývá se „*casus irreducibilis*“.

2.4 Porovnání knih

Všechny výše uvedené knihy měly značný vliv na vývoj komplexních čísel v dějinách algebry. I když se jedná o knihy z 16. – 18. století, jejich výklad je jasný a některé z nich jsou čtivé i pro nematematické čtenáře (*Vollständige Anleitung zur Algebra* – Leonhard Euler). Každá publikace přistupuje ke komplexním číslům trochu jinak, některé jsou ještě zdrženlivé (*Ars Magna* – Girolamo Cardano), zatímco jiné berou komplexní čísla jako samozřejmé (*La Géométrie* – René Descartes a *Vollständige Anleitung zur Algebra* – Leonhard Euler). V některých knihách můžeme nalézt návaznost na knihy vydané dříve, inspiraci z nich, ale někdy také i kritiku. V knize *Vollständige Anleitung zur Algebra* se Leonhard Euler inspiruje právě knihou *Ars Magna* a rozvíjí tak řešení rovnic třetího stupně, i v názvu kapitoly uvádí jména Cardano a Sciopine del Ferro, viz kapitola 2.3.2. René Descartes ve své knize *La Géométrie* také zmiňuje osobnost Cardana, uvádí řešení kubických rovnic dle jeho postupu, ale kritizuje způsob důkazu, které Cardano uvádí pomocí krychlí, zatímco Descartes pomocí tečen v kružnici, více v kapitole 2.2.2.

Kniha *Ars Magna* je nejstarší z knih, které jsou zde porovnávány, byla vydána v roce 1545 a při porovnání musíme přihlížet i k tomuto faktu. V anglickém překladu je kniha psaná pomocí dnešní symboliky a snaží se čtenáři co nejlépe vysvětlit řešení rovnic. Na druhou stranu tak ztrácí historické souvislosti a čtenář může nabýt dojmu, že už Cardanmo používal toto moderní značení. Cardano v té době nepoužíval žádné vzorce, jen pravidla. V knize

[57] Tato formule je dnes nazývána Cardanova formule. EULER. *Elements of algebra.*, c.d., s. 264.

nalezneme zmínky o odmocninách ze záporných čísel při řešení kubických rovnic, tak i v samostatné kapitole. I když jim ještě není věnováno tolik pozornosti, je to důležitý pokrok ve vnímání nynějších komplexních čísel. Cardano k odmocninám ze záporných čísel přistupoval obezřetně, při řešení kubických rovnic kořen s odmocninou ze záporného čísla uvedl jen jako jednu možnost a v jeho ukázkových případech se nevyskytl. Tento typ kubické rovnice pak nazývá „*casus irreducibilis*“, kde irreducibilis znamená neřešitelný. Cardano se v knize snažil svá pravidla doplňovat i důkazy, které byly grafické. K pochopení důkazů je ale nutná prostorová představivost, protože většina důkazů se aplikuje na krychle (cubus). Na Cardana a knihu *Ars Magna* pak navazují další autoři, v našem případě se jedná o Descarta a Eulera.

V knize *Geometrie* od Descarta se již dozvídáme něco více o komplexních číslech, které Descartes nazývá imaginární. Při počítání kubické rovnice mu vyjdou dva kořeny imaginární. Zde prvně používá pojem **imaginární**, což je další důležitý milník v historii komplexních čísel (rok 1637). Důležitým přínosem této knihy jsou grafická znázornění řešení rovnic pomocí křivek a jejich průsečíků. Kubickou rovnici Descartes řeší pomocí tečen v kružnici a uvádí, kdy nastane případ, že jsou kořeny imaginární. Descartes uznává imaginární kořeny jako řešení rovnice a formuluje tak základní větu algebry. Kniha je psána jasně a srozumitelně, na jedné straně je vždy znázorněn originál v latině. Pro čtenáře je zajímavé porovnat způsob zápisu v té době a nynější zápis. Jak již bylo řečeno, tak Descartes v matematickém značení udělal velký pokrok. V některých částech je kniha náročnější, protože ne všechno je zde dopodrobna vysvětleno. Descartes často zakončuje kapitoly s tím, že řešení příkladu je obdobné, jak již bylo vysvětleno dříve, a proto dořešení příkladu nechává na čtenáři. Kniha tedy dává návody, jak lze jednotlivé příklady řešit, ale zdaleka ne všechny typy jsou zde vyřešeny a je zde nechán prostor čtenáři a zároveň jej také motivuje k vlastnímu vyřešení příkladu.

Euler v knize *Vollständige Anleitung zur Algebra* vysvětluje matematické pojmy od začátku, definuje matematické operace a také číselné obory. Postupně se tedy dostává až k imaginárním číslům, kde zavádí pravidla pro operace s imaginárními čísly. Tato kniha neobsahuje geometrické důkazy, což je asi jediná nevýhoda oproti dvou předcházejícím knihám. Za to je ale kniha psána velmi poutavě a srozumitelně i pro laickou veřejnost. Tato kniha by měla být povinnou četbou alespoň pro studenty, kteří se o matematiku zajímají a hodlají se ji v budoucnu věnovat. I když je kniha z roku 1770, obsahuje už moderní zápis matematických výrazů a je tak dobře čitelná. Jsou zde uvedeny zajímavé příklady z každodenního života tehdejší doby, které jsou poučné. Některé kapitoly z této knihy by mohly být používány i dnešních učebnicích, Euler zde například vhodně vysvětluje číselné obory. Tuto knihu bych doporučila všem studentům, ze kterých budou v budoucnu učitelé matematiky.

3 Zavedení komplexních čísel v učebnicích

V této kapitole se budu zabývat komplexními čísly a jejich zavedení ve středoškolských učebnicích z různého období (od roku 1964 až po současnost). Věnovala jsem pozornost hlavně historii a zavedení komplexních čísel (definice a základní vlastnosti) ve 4 vybraných učebnicích. Jako závěrečnou podkapitolu jsem uvedla, jak jednotlivé učebnice přistupují k využití komplexních čísel v dnešní době.

3.1 Historie komplexních čísel

Pro výuku komplexních čísel je dle mého důležité znát i historii, a proto se následujících podkapitolách zaměřuji také na to, jak je historie v učebnicích vyložena a jaký význam je na ní kladen.

3.1.1 Kabele, Mikulčák, Bartoš, Duňková a Krňan: Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (1964)

Závěrečná část v kapitole komplexních čísel v této knize se nazývá se *O vývoji a využití komplexních čísel*. Zde je nastíněn historický vývoj a zároveň je zde popsáno, jaký mají komplexní čísla využití v dnešním světě. Z historie autoři uvádí nejprve Girolama Cardana:

> *Již velmi dávno bylo známo, že rovnice jako je např.* $x^2 + 1 = 0$*, nemají v oboru reálných čísel řešení. Teprve G. Cardano v 16. století učinil krok k překonání této potíže. Narazil na ni při řešení úlohy*[58] *týkající se rozkladu čísla 10 na dva sčítance, jejichž součin je 40.*[59]

Z dalších osobností, které se zabývali komplexními čísly, jsou zde uvedeny L. Euler a K. F. Gauss, pak už se autoři věnují využití komplexních čísel při výpočtech v různých technických oborech.

> *Tak se postupně došlo k tomu, že se už druhé odmocniny ze záporných čísel nezavrhovaly, ale užívalo se jich stále více, ačkoli se jim nedával žádný význam, tj. ačkoli nebyly vlastně definovány. Např. petrohradský akademik švýcarského původu L. Euler v polovině 18. století zavedl označení* i *pro ryze imaginární jednotku. Teprve*

[58] Zde je historie popsána chybně, Cardano narazil při řešil rovnice třetího stupně.
[59] KABELE, Jiří, MIKULČÁK, Jiří, BARTOŠ, Pavel, DAŇKOVÁ, Berta a KRŇAN, František. *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. s. 154.

když K. F. Gauss r. 1831 podstatu komplexních čísel vyložil, byla komplexní čísla správně pochopena.[60]

3.1.2 Müllerová, J.: Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku (1976)

V této učebnici je historie komplexních čísel zmíněna hned na začátku učebnice. Autorka v úvodu začíná se řečnickou otázkou, na kterou odpovídá a uvádí, že prvně se snažili problém odmocnin ze záporných čísel řešit už ve staré Indii a poté se k tomu problému vrátili v 16. století, kde se jím zabývali matematici Cardano a Bombelli.

Uvažovali jste někdy o problému, zda je možno určit $\sqrt{a}$, jestliže a je reálné záporné číslo? Tento problém je již velmi starý. O jeho řešení se pokoušeli již ve staré Indii.

Problém existence druhé mocniny ze záporných čísel se opět objevil znovu až v 16. století, kdy italští matematici Cardan a Bombelli řešili kvadratické rovnice a rovnice třetího stupně.[61]

V dalším textu jsou uvedeny i konkrétní rovnice, které Cardano a Bombelli řešili. Autorka zde dále zmiňuje Eulera a cituje i jeho vysvětlení záporných čísel pod odmocninou v knize *Vollständige Anleitung zur Algebra*.

Slavný matematik 18. století Leonhard Euler (1707-1783) zavedl pro $\sqrt{-1}$ symbol i. Tento symbol však nepokládal za žádné číslo.[62]

3.1.3 Riečan, Bero, Smida, Šedivý: Matematika pro IV. ročník gymnázií (1986)

Před kapitolou *Komplexní čísla* je uvedená historie počítání rovnic 3. stupně, jmenuje se *Druhý pohled do dějin matematiky* – Cardano a Tartaglia. Tento pohled do dějin matematiky se věnuje řešení rovnice třetího stupně a jejím řešitelům, především tedy osobnostem Cardana a Tartaglii.

Od Tartaglii pravděpodobně vymámil tuto metodu Gerolamo Cardano (1501-1576), a tak se dnes podle Cardana nenazývá nejenom Cardanova hřídel, ale také Cardanovy vzorce. Možná trochu nespravedlivě nazýváme vzorce pro řešení kubické rovnice

[60] KABELE, MIKULČÁK, BARTOŠ, DAŇKOVÁ a KRŇAN. *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.*, c.d., s. 155-156.
[61] MÜLLEROVÁ, Jana. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. s. 3.
[62] MÜLLEROV. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií.*, c.d.,s. 4.

podle Cardana, a ne podle Tartaglii. Je však třeba poznamenat, že Tartaglia sice našel postup řešení, ale až Cardano dokázal, že Tartagliův postup je spolehlivý. [63]

V této učebnici autoři neuvádějí jen osobnost Cardana, ale vysvětlují, že rovnice třetího stupně měla i jiné řešitele. Dále pak vysvětlují způsob výpočtu rovnice třetího stupně na příkladu. Dále pak uvádí osobnost K. F. Gausse, který přispěl k pochopení komplexních čísel, tím, že je dokázal graficky znázornit.

Dostali jsme se do rozporné situace. Počítali jsme s něčím neskutečným (imaginárním), ale při respektování známých algebraických pravidel jsme se dostali k něčemu skutečnému – k reálnému kořenu kubické rovnice. Tento paradox vyřešil až Karl Friedrich Gauss (1777-1855) tím, že tzv. ryze imaginární čísla začal zobrazovat v rovině na osu y, zatímco reálná čísla na osu x. [64]

3.1.4 Calda, E.: Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla (1994)

Na konci této učebnice je uvedena kapitola, která se nazývá *Z historie komplexních čísel*. Kapitola je hezky zpracovaná, ale tím, že je na konci knihy působí spíše jen jako dodatek nebo zajímavost ke čtení a mohla by být lehce přehlédnuta. Autor zde zmiňuje následující osobnosti z 16. století: Scipione del Ferro, Nicollo Tartaglia a Gerolamo Cardano.

O vyřešení kubické rovnice se marně pokoušeli již starověcí matematikové řečtí, čínští, indičtí i arabští, úspěšně však zvládli pouze některé speciální případy. Její obecné řešení je spojeno se jmény Scipion del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (1500-1557) a Gerolamo Cardano (1501-1576), který ve svém díle Ars magna z roku 1545 zveřejnil a dokázal Tartagliovu metodu řešení kubické rovnice a s její pomocí odvodil obecné vzorce, které dnes nazýváme Cardanovými.[65]

Ze 17. a 18.století jsou zde uvedena jména matematiků, jako jsou: Abraham de Moivre, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler a Carl Friedrich Gauss. Autor se pak věnuje využití komplexních čísel v matematice a v technice.

V 17. a 18. století ukázali Abraham de Moivre (1667-1754), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a zejména Leonhard Euler (1707-1783), že komplexní čísla mají uplatnění i v jiných oborech matematiky, např. v geometrii; od L. Eulera pochází

[63] RIEČAN, Beloslav, BERO, Peter, SMIDA, Jozef a ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Matematika pro IV. ročník gymnázií.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. s. 116.
[64] RIEČAN, BERO, SMIDA a ŠEDIVÝ. *Matematika pro IV. ročník gymnázií.*, c.d., s. 116-118.
[65] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. Praha: Prometheus, 1999. s. 123.

označení „i" pro imaginární jednotku. Definitivně ztratila komplexní čísla svou „tajuplnost" zejména díky pracím Carla Friedricha Gausse (1777-1855), který zavedl geometrické znázornění komplexních čísel jako bodů roviny.[66]

3.1.5 Porovnání učebnic

V závěrečné kapitole *O vývoji a užití komplexních čísel* v učebnici *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol* jsou pro základní představu uvedeny následující osobnosti z dějin komplexních čísel: Cardano, Euler, Gauss a Hamilton. Tato kapitola je hezky zpracovaná, ale mohla by být trochu detailnější a neuškodilo by uvést i další matematiky, kteří s komplexními čísly pracovali. V souvislosti s historií komplexních čísel by také bylo vhodné zmínit, že byly objeveny při počítání rovnic třetího stupně a zmínit Cardanovy vzorce.

V úvodu učebnice *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku* je historický vývoj nastíněn jen krátce, ale na druhou stranu je zde jako zajímavost uvedena citace Eulera, která komplexní čísla přibližuje. Pak teprve učebnice přechází přes číselné obory (čísla přirozená, celá, racionální, iracionální, reálná) na dnešní definici komplexních čísel. Důležité je, že je historie zavedení komplexních čísel uvedena hned na začátku učebnice. V ostatních učebnicích je historický vývoj uveden až jako závěrečná kapitola po zvládnutí celé problematiky komplexních čísel.

V učebnici *Matematika pro IV.ročník gymnázií* nalezneme jen *Pohledy do dějin matematiky,* které nejsou přímo uvedeny v kapitole *Komplexních čísel*. Toto okénko do historie má nejspíše uvést následující kapitolu *Komplexní čísla*, ale pokud studenti nečtou celou knihu stránku po stránce, mohli by to lehce přehlédnout. Bylo by lepší zařadit to přímo do kapitoly, která se věnuje komplexním číslům. Okénko se zabývá řešením kubických rovnic, kde jsou zmíněny řešitelé Scipion del Ferro, Niccolo Tartaglia a Gerolamo Cardano.

Kapitola *Z historie komplexních čísel* v učebnici *Matematika pro gymnázia* od Emila Caldy je hezky zpracovaná a čtivá. Je zde i ukázka příkladu, který lze řešit pomocí Cardanových vzorců. Autor zde mimo Cardana zmiňuje i ostatní řešitele kubických rovnic a jako jediný uvádí, že řešení kubických rovnic nalezneme v knize *Ars Magna.* Bohužel je kapitola umístěna na konci učebnici a působí tak jen jako zajímavost pro ty, kteří se chtějí dozvědět víc, což je určitě škoda. Právě pro pochopení komplexních čísel je historický vývoj velmi

[66] CALDA. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.*, c.d., s. 123-124.

důležitý a měl by být řazen na začátek učebnic anebo aspoň by měl být přiblížen učitelem, který na danou kapitolu o historii upozorní.

3.2 Definice a základní vlastnosti komplexních čísel

Zde popíšeme základní vlastnosti a charakteristiky komplexních čísel, tak jak jsou uvedeny ve vybraných učebnicích. I když každá učebnice nahlíží na komplexní čísla jinak (jedna jejich charakteristiky přirovnává k vektorům, jiná je popisuje více algebraicky), vždy má počítání s nimi stejná pravidla, i když v obměnách se značením.

3.2.1 Kabele, Mikulčák, Bartoš, Duňková a Krňan: *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (1964)*

Komplexní čísla jsou jednou z kapitol této učebnice a jsou uvedeny od strany 125 do strany 157. Komplexní čísla jsou zde porovnávány s vektory a ve dvou souběžných sloupcích jsou uváděny souvislosti mezi nimi. Autoři uvádějí komplexní číslo jako uspořádanou dvojici reálných čísel, definují reálnou a imaginární část komplexního čísla. V učebnici jsou definice následovány jedním až dvěma příklady.

Uspořádaná dvojice reálných čísel $(a_1; a_2)$ *se nazývá* ***komplexní číslo****. Je-li* $(a_1; a_2)$ *komplexní číslo, nazývá se číslo* a_1 ***reálná část****, číslo* a_2 ***imaginární část*** *komplexního čísla.*

Dvě komplexní čísla $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ *jsou si rovna, je-li* $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Komplexní čísla $(a_1; a_2)$*, jejichž imaginární část* $a_2 \neq 0$*, se nazývají čísla* ***imaginární****. Komplexní číslo* $b = (0; b_2)$*, (s reálnou částí* $b_1 = 0$*), kde* $b_2 \neq 0$*, se nazývá* ***ryze imaginární.***[67]

Dále pak zavádí pojem absolutní hodnota komplexního čísla, součet komplexních čísel a dostávají se k zavedení imaginární jednotky i. Následují pak k ilustraci jeden až dva příklady a pak samostatné cvičení pro studenty.

Je-li dáno komplexní číslo $a = (a_1; a_2)$*, pak výraz* $\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ *se nazývá* ***prostá (absolutní) hodnota*** *komplexního čísla a. Píšeme* $|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$.

Komplexní číslo s, které má $|s| = 1$*, se nazývá* ***komplexní jednotka****.*

[67] KABELE, MIKULČÁK, BARTOŠ, DAŇKOVÁ a KRŇAN. *Matematika pro II. ročník.*, c.d., s. 125-127.

Jsou-li dána komplexní čísla $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$, *pak součtem komplexních čísel a a b se nazývá komplexní číslo*

$$a + b = (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$$

Komplexní jednotka $(0; 1)$ *se v matematice označuje písmenem i. Píšeme* $(0; 1) = i$.[68]

3.2.2 Müllerová, J.: Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku (1976)

Tato učebnice je celá věnovaná komplexním číslům, téma je rozděleno do sedmi kapitol a psáno stylem skript. Nejdříve jsou v učebnici vysvětleny algebraické pojmy jako jsou okruh, těleso a pak se teprve dovídáme definici komplexních čísel a pravidla pro operace s nimi. V učebnici nejsou uvedeny vypočítané příklady, jsou zde jen úlohy, kde je třeba dokazovat platnost výroků a pak jsou zde uvedeny příklady na procvičení probírané látky.

Nechť C je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel (x, y), *na níž je definována relace rovnosti takto:*

$$\forall (x, y) \in : (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2).$$

Na množině C zavedeme operaci sčítání + a násobení takto:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C:$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \left(x_1 + x_{2,}\ y_1 + y_2\right)$$

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = \left(x_1x_2 - \ y_1y_{2,}\ x_1y_2 + y_1x_2\right)$$

Prvky tělesa C nazveme ***komplexní čísla*** *a těleso* $C = (C, +, .)$ *těleso komplexních čísel.* [69]

Dále je uvedena definice čísla imaginárního a ryze imaginárního, pozornost je také věnována imaginární jednotce i. Pro studenty jsou připraveny úlohy k řešení bez předchozích ukázkových řešeních.

Jestliže $z = (a, b)$ *je komplexní číslo, pak nazveme reálné číslo a jeho reálnou složkou a reálné číslo b jeho imaginární složkou. Značíme* $a = Re\, z, b = Im\, z$. *Čísla* $z =$

[68] KABELE, MIKULČÁK, BARTOŠ, DAŇKOVÁ a KRŇAN. *Matematika pro II. ročník.*, c.d., s. 127-130.
[69] MÜLLEROVÁ. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií.*, c.d.,s. 7-8.

(a, b), pro které platí $b \neq 0$, se nazývají ***imaginární****. Čísla $z = (0, b)$, pro které platí $b \neq 0$, se nazývají* ***ryze imaginární.***[70]

Číslo $(0,1)$ má mezi komplexními čísly zvláštní postavení. Toto číslo označíme symbolem i, $i = (0,1)$. Místo dvojic $(x, 0)$ a $(0, y)$ budeme psát pouze x, resp. iy, kde $x, y \in R$. Platí tedy: $(x, y) = x + iy$ [71]

3.2.3 Riečan, Bero, Smida, Šedivý: Matematika pro IV. ročník gymnázií (1986)

Komplexním číslům je v této učebnici věnována dle mého poměrně krátká kapitola v rozsahu 36 stránek. Problematika komplexních čísel je probíraná až po zvládnutí diferenciálního a integrálního počtu. Autoři definují komplexní čísla následovně. V rámci definice uvádí i konkrétní příklady.

Množinu C komplexních čísel získáme z množiny R tak, že k ní přidáme číslo i, tj. takový prvek pro který platí $i^2 = -1$. Prvky množiny C se nazývají ***komplexní čísla****. Jsou to výrazy typu $a + bi$, přičemž a, b jsou reálná čísla. Každé komplexní číslo se dá zapsat ve tvaru $a + bi$ jednoznačně; má reálnou část a, imaginární část b. Název imaginární byl zaveden proto, že výrazy typu $2i$, $1 + i$ neměly delší dobu reálnou interpretaci. Číslo i se nazývá* ***imaginární jednotka****, čísla typu $-5i$, $2i$ se nazývají* ***ryze imaginární čísla***.[72]

Autoři pak zavádějí pravidla pro operace s komplexními čísly a následně pak pro čtenáře vyřeší vzorové příklady, za kterými následují úlohy k samostatnému vyřešení.

Komplexní čísla se sčítají (odčítají) analogicky jako dvojčleny – výraz i se jednoduše vytkne před závorku.

Dvě komplexní čísla $a + bi$, $c + di$ se navzájem rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich reálné a imaginární části. To znamená právě tehdy, když $a = c$, $b = d$.[73]

3.2.4 Calda, E.: Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla (1994)

Podle této učebnice se v dnešní době učí na gymnáziích, je dobře koncipovaná, přehledně rozdělená do kapitol. Definice jsou zvýrazněny a umístěny do rámečku, aby nedošlo k jejich přehlednutí. Jsou zde vhodně zvolené ukázkové příklady a následuje pak sada příkladů pro

---

[70] Je zde uvedena poznámka: *„Název imaginární je převzat z francouzštiny (imaginaire = neskutečný).“*
[71] MÜLLEROVÁ. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií.*, c.d., s. 9.
[72] RIEČAN, BERO, SMIDA a ŠEDIVÝ. *Matematika pro IV. ročník,* c.d., s. 125.
[73] RIEČAN, BERO, SMIDA a ŠEDIVÝ. *Matematika pro IV. ročník.,* c.d., s. 126.

procvičení. Autor definuje komplexní číslo následovně a uvádí operace pro počítání s komplexními čísly.

Komplexním číslem *nazveme výraz tvaru* $a + bi$*, kde a, b jsou reálná čísla a i je číslo, pro než* $i^2 = -1$*. V komplexním čísle* $a + bi$ *se číslo a nazývá reálná část a číslo b imaginární část, číslo i se nazývá imaginární jednotka.*

Pro libovolná komplexní čísla $a + bi$ *a* $c + di$ *definujeme následující operace:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Libovolná komplexní čísla se rovnají, pokud se rovnají jejich části reálné i imaginární.[74]

Autor se pak dostává k definici algebraického tvaru komplexního čísla, pak vysvětluje absolutní hodnotu a komplexní jednotku. Definice jsou opět doplněny řešenými příklady a samostatnými příklady pro studenty. Na konci kapitoly je uvedeno shrnutí nejdůležitějších probraných definic.

Zápis komplexního čísla z ve tvaru $a + bi$ *se nazývá* ***algebraický tvar*** *komplexního čísla z. Čísla* $a + bi$*, pro něž* $b \neq 0$*, se nazývají* ***imaginární****, a je-li ještě navíc* $a = 0$*, nazývají se* ***ryze imaginární****.*

Absolutní hodnota *komplexního čísla z je číslo* $\sqrt{z\bar{z}}$*, tj.* $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$*. Z této definice pak plyne, že pro* $z = a + bi$ *je* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*. Komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, se nazývá komplexní jednotka.*[75]

3.2.5 Porovnání učebnic

Komplexní čísla jsou ve většině zmiňovaných učebnic zavedena přes reálná čísla. Rozdílné zavedení komplexních čísel má učebnice *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol*, kde jsou komplexní čísel hned přirovnávány k vektorům a dále jsou definovány také jako **uspořádaná dvojice reálných čísel**. Přirovnání k vektorům je velice zajímavé a názorné, oproti tomu mi zde ale chybí řešené příklady.

---

[74] CALDA. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.*, c.d., s. 12-13.
[75] CALDA. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.*, c.d., s. 15-28.

V učebnici *Komplexní čísla* od Jany Müllerové jsou uvedeny příklady rovnic, kde řešením jsou nejdříve přirozená, celá, pak racionální, reálná a komplexní čísla. K rovnicím jsou uvedeny příklady a je uvedeno v jakém době se podobné příklady řešili. [76] Jsou zde vysvětleny pojmy jako těleso, grupa atd. Nevýhodou jsou chybějící ukázkové příklady.

V učebnici *Komplexní čísla pro gymnázia* a *Matematika pro IV. ročník gymnázií* jsou nejdříve zmíněna reálná čísla a pravidla počítaná s nimi, jako komutativita, distributivita, asociativita, neutrální prvek, inverzní prvek, pak navazuje zavedení komplexních čísel. Zde jsou komplexní čísla zavedena pomocí výrazu $a + b\mathrm{i}$, kde jsou uvedeny hned 3 symboly. Vysvětlení komplexních čísel je zde strohé, ale na druhou stranu zde nechybí ukázkové příklady a způsoby jejich řešení.

Daleko lepší zavedení je v učebnici *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*, kde ***C*** **je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel**. Všechny další definice jsou přehledně umístěny v rámečku a na konci jsou nejdůležitější zopakovány. Jsou zde vyřešeny ukázkové příklady a pak jsou pro studenty připraveny úlohy k samostatnému řešení.

3.3 Využití komplexních čísel

Pro výuku je důležité umět žáky seznámit i s tím, jaké praktické využití má to, co je učíme. I pro pochopení komplexních čísel je důležité zmínit jejich využití v dnešní době.

V učebnici *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol* je zmíněno, že komplexní čísla jsou uváděna v elektrotechnice k vyjádření veličin střídavého proudu nebo při stanovení metody propočtů profilů křídel letadel. Konkrétní příklady zde nejsou počítány, protože by byly potřeba znalosti z fyziky a techniky.[77]

V učebnici *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku* se samostatná VII. kapitola zabývá užitím komplexních čísel při řešení úloh z praxe. I když se jedná o náročné úlohy, jejich uvedení je zajímavé. Komplexní čísla jsou zde aplikována v mechanice, elektrotechnice, kartografii a aerodynamice.[78]

---

[76] Např. Druhou rovnici ($5x = 24$) řešil např. středověký obchodník, když dělil sukno 24 loktů dlouhé na pět dílů. Prohlásil, že jeden díl je dlouhý $4\frac{4}{5}$ lokte. Řešením úlohy je racionální číslo.

[77] KABELE, MIKULČÁK, BARTOŠ, DAŇKOVÁ a KRŇAN. *Matematika pro II. ročník.*, c.d., s. 156-157.

[78] MÜLLEROVÁ. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií.,* c.d., s. 74-94.

Využití komplexní čísel je také zmíněno v učebnici *Komplexní čísla pro gymnázia*, kde je řečeno, že komplexní čísla pomáhají řešit i mnohé úlohy z technické praxe (elektrotechnika, hydromechanika apod.).[79]

V učebnici *Matematika pro IV. ročník gymnázií* je uvedeno, že komplexní čísla se používají v elektrotechnice, kartografii a v letecké konstrukci k určování profilů částí letadel. [80]

[79] RIEČAN, BERO, SMIDA a ŠEDIVÝ. *Matematika pro IV. ročník gymnázií.*, c.d., s. 118.
[80] CALDA. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.*, c.d., s. 125.

Závěr

Tato bakalářská práce dává přehled o zavedení komplexních čísel v dějinách algebry. Čtenář je seznámen s významnými osobnostmi z dějin algebry, které se věnovaly komplexním číslům (odmocninám ze záporných čísel a později nazývaným imaginárním číslům). Více prostoru je věnováno osobnostem Cardana, Descarta a Eulera, jejichž díla porovnávám v následující kapitole. Při porovnání děl z období 16. – 18.století zjistíme, že některá díla jsou i dnes dobře čtivá a naučná. Díla by neměla být v dnešní době být opomíjena a měly by být na seznamu povinné četby pro studenty – budoucí učitele (*Geometrie* – René Descartes a *Vollständige Anleitung zur Algebra* – Leonhard Euler). V některých knihách jsou i grafické důkazy, které nám blíže vysvětlují komplexní čísla. Je mnoho dalších zajímavých a důležitých děl z toho období, které by mohly být popsány, je zde tedy prostor pro četbu a následné zpracování od studentů píšící bakalářské práce. Osobně doporučuji z porovnávaných knih k přečtení *Vollständige Anleitung zur Algebra* od Leonharda Eulera

„

, kniha je mistrovsky zpracovaná, srozumitelná a čtivá.

V poslední kapitole jsou pak porovnávány čtyři středoškolské učebnice. Při vysvětlování komplexních čísel jsou důležité historické souvislosti, tak jsem se i v tomto porovnávání zaměřila na historii a zhodnotila, jak je v učebnicích podávána a kolik prostoru je jí v rámci publikací věnováno. Dále je porovnáno konkrétní zavedení komplexních čísel, jejich definice a základní charakteristiky, i zde v učebnicích najdeme určité rozdíly. Pro studenty je důležité praktické využití komplexních čísel, které je zde také zmíněno. Tato kapitola dává čtenáři přehled, jak je v jednotlivých publikacích přistupováno ke komplexním číslům a ze kterých učebnic by v budoucnu výuky komplexních čísel mohli čerpat. Zde nelze jednoznačně vyzdvihnout jednu učebnici, v každé z nich je vždy něco, co by mohlo studentům pomoci k pochopení komplexních čísel. V tomto případě je tedy nejlepší kombinace všech učebnic.

Literatura

[1] BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard. *Matematika v 16. a 17. století*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7

[2] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-153-1

[3] CARDAN, Jerome. Book of my life. U.S.A: E.P. DUTON & CO., INC., 1930. s 245. Dostupné z: http://djm.cc/library/cardan-book-of-my-life-1930.pdf

[4] CARDANO, Girolamo. *The Rules of ALGEBRA (Ars Magna)*. Přeložil T. Richard WITMER. New York: Dover Publication, 2007. ISBN 10:0-486-45873-3

[5] DESCARTES, René. *Geometrie*. Přeložil Jiří FIALA. Praha: OIKOYMENH, 2010. ISBN 978-80-7298-313-3

[6] EULER, Leonhard. *Elements of algebra*. Translated by John Hewlett. West Hanover, Massachusetts: Halliday Lithograph, 1984. ISBN 0-387-96014-7

[7] MÜLLEROVÁ, Jana. *Komplexní čísla pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. ISBN 14-224-86.

[8] RIEČAN, Beloslav, BERO, Peter, SMIDA, Jozef a ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Matematika pro IV. ročník gymnázií.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. ISBN 14-591-87.

[9] KABELE, Jiří, MIKULČÁK, Jiří, BARTOŠ, Pavel, DAŇKOVÁ, Berta a KRŇAN, František. *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1964. ISBN 15-564-64.

[10] STRUIK, Duirk J. *Dějiny Matematiky*. Přeložil Luboš Nový a Jaroslav Folta. Praha: Orbis nakladatelství, 1963. ISBN 11-123-63

[11] STRUIK, Duirk J. *A Source book in Mathematics, 1200-1800.*Massachusetts: Harvard university press, 1969. ISBN 0-691-08404-1

[12] WAERDEN, B.L. van der. *A History of Algebra*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985. ISBN 3-540-13610-X

[13] DUNNINGTON, G. W.: *Carl Frederick Gauss*: *Titan of Science*. New York: MAA, 2004. ISBN 0-88385-547-X.

Internetové zdroje:

[14] STUDNIČKA, František Josef. *O průběhu života Gaussova*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/123683

[15] STUDNIČKA, František Josef. *O Gaussově činnosti matematické*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/123681

[16] Abraham de Moivre. Famous mathematicians. [online]. 6.11.2016 [cit. 2016-11-06]. Dostupné z: http://www.famous-mathematicians.com/abraham-de-moivre/

[17] Leonhard Euler. Přednáška Koutný. [online]. 6.11.2016 [cit. 2016-11-06]. Dostupné z http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

[18] Carl Friedrich Gauss. Přednáška Koutný. [online]. 6.11.2016 [cit. 2016-11-06]. Dostupné z: http://www.zas.cz/download/gauss.pdf